CEPLAG – UMSS
Centro de Planificación y Gestión
Universidad Mayor de San Simón

LA TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES CRITERIOS:
Un resumen conceptual y teórico

Ramiro SÁNCHEZ L.

Documentos de Trabajo
Número 4, agosto de 2001

Los "**Documentos de Trabajo**" del CEPLAG tienen el propósito de informar los avances de investigación que se están realizando en el CEPLAG. Así mismo, buscan contribuir al debate académico, tanto en el seno de la UMSS como en la región y en el país. Estos documentos son publicados gracias al apoyo del **Consejo Flamenco Interuniversitario de Bélgica (VLIR)** y de la **Universidad Católica de Leuven**.

Cochabamba - Bolivia

La Toma de Decisiones con Múltiples Criterios

Preparado por: Ramiro SÁNCHEZ L. – tunari@albatros.cnb.net
CEPLAG, septiembre de 2001

Síntesis

Los métodos y modelos para la toma de decisiones con criterios múltiples proveen herramientas de utilidad a la hora de analizar problemas complejos. Los procesos de toma de decisiones han sido analizados y modelados matemáticamente para dotar a las personas encargadas de tomar decisiones, de herramientas que les permitan contar con una mejor visualización de los factores que intervienen en los procesos, así como de las preferencias existentes. Los procesos de decisión relacionados al *desarrollo sostenible* involucran la interrelación de tres sistemas con objetivos muchas veces contrapuestos: el sistema económico, el sistema social y el sistema medioambiental. La interrelación de estos sistemas produce conflicto de intereses que hace de cualquier proceso de decisión, una tarea compleja que requiere de métodos sistemáticos. Dentro de la literatura relacionada con modelos de preferencia se han identificado cinco importantes modelos específicos cuyos marcos conceptuales son comentados brevemente: El Proceso Analítico Jerárquico (AHP), el método Electre III, el método Promethee, el método MacBeth y el método NAIADE.

I. La utilidad de los modelos de preferencias

La toma de decisiones es la principal actividad de cualquier ejecutivo. Sea en el sector público o en el sector privado, la tarea de tomar decisiones constituye la actividad cotidiana más difícil y riesgosa, pues involucra la necesidad de evaluar opciones y elegir, de entre todas las alternativas, aquella que mejor se adecue a los objetivos perseguidos. Una mala decisión puede llegar a perjudicar los intereses de la entidad en virtud de la cual la decisión es tomada, afectando el accionar de individuos, empresas, países e incluso de la humanidad entera.

La manera en que un proceso de decisión es llevado a cabo depende de las condiciones organizacionales del entorno. A gran escala y en condiciones democráticas, por ejemplo, el proceso de decisión más común es aquel que capta a través de métodos de votación, las preferencias individuales de cada miembro integrante de un grupo, para luego emitir un juicio tendiente a reflejar de la mejor manera posible la opinión global de aquel grupo. A pesar de que los sistemas de elección por medio del voto son comunes en muchos países, es interesante observar que los procesos de recuento de los votos no son los mismos en todas partes [Bouyssou, 2000]. Por lo general, lo que se persigue en un proceso de votación es elegir aquella opción que refleje la opinión de la mayoría, entendiendo que la mejor alternativa sería aquella que goce del apoyo del subgrupo más numeroso. A veces se exige que dicho subgrupo cuente con más de la mitad de los miembros del grupo, a lo que se llama “mayoría absoluta”. Estudiosos de las Teorías de Elección Social (Social Choice Theory) han demostrado que algunos procesos de elección por mayoría absoluta tienen serias falencias en cuanto a reflejar la verdadera preferencia general de un conjunto de personas.

Para ilustrar esto tomemos el siguiente ejemplo: Cuatro candidatos A, B, C y D, pretenden ser elegidos por un grupo numeroso de personas. Llevado a cabo el proceso de votación, en el proceso de recuento se ve que el candidato A goza del 51% de los votos, de modo que es elegido vencedor. Sin embargo, un análisis más profundo muestra que de haberse pedido a los votantes que expresen su preferencia de mayor a menor, los datos hubieran sido los siguientes: 26% eligen ABCD; 25% eligen ABDC; 18% eligen BDCA; 15% eligen BCDA; 10% eligen CBDA y 6% eligen DBCA. De esta distribución de preferencias se puede ver que si bien el 51% de los votantes considera que A es la mejor opción, 49% considera que B es mejor que A (49=18+15+10+6), así como que este último, lejos de ser el mejor, representa más bien la peor opción en el 49% de los casos. En contraste, 100% de los electores considera que B es una opción razonablemente buena, pues lo han colocado si no en el primer lugar, en el segundo. Como se puede ver, el hecho de que A sea la mejor opción no es obvio, pese a que este ha sido elegido por mayoría absoluta. Parecería más bien ser que el candidato B cuenta con mayor apoyo que el candidato A.

Cuando la toma de decisiones recae en una sola persona, el proceso mental mediante el cual la decisión es tomada se desarrolla en base a la información cognoscitiva que proviene de las propias experiencias personales del individuo, además de otras fuentes de información externa como ser opiniones de colegas y expertos o datos recavados a propósito. La dificultad radica muchas veces en la inexactitud de los datos, la complejidad en el análisis de las alternativas, la subjetividad inherente a la definición de prioridades y, por si fuera poco, en las trampas mentales en las que nuestro cerebro puede hacernos caer si es que no tenemos el cuidado de evitarlas [Hammond, 1998]. A manera de ilustrar esto, sirva comentar el siguiente caso: Muchos ejecutivos despliegan marcada preferencia en relación con aquellas alternativas que perpetúan el status-quo. Al parecer, esto se debe a un deseo instintivo de proteger el ego. Muchos experimentos han demostrado esta trampa mental. Ejemplo de ello es el conocido experimento en el que cada uno de los miembros de un grupo de personas recibe un regalo que le es entregado de forma aleatoria. Todos los regalos están empaquetados en cajas iguales y todos tienen el mismo valor, pero su contenido no es el mismo. Se les dice que aquellos que así lo deseen pueden cambiar de regalo, siempre y cuando lo hagan antes de ver su contenido. De ser cierta la hipótesis de que es igualmente probable que una persona que ha recibido su regalo decida cambiarlo o no, aproximadamente la mitad de ellos tendrían que decidir cambiar su regalo. El hecho de que solo uno de cada diez decidiera hacerlo demuestra la tendencia hacia el status-quo como una trampa mental. Al igual que la trampa del status-quo, existen otras trampas mentales que muchas veces impiden que el directivo sea totalmente ecuánime a la hora de evaluar alternativas. Por esta razón, resulta de gran utilidad en problemáticas complejas, sistematizar los procesos de decisión y generar métodos de visualización y revisión de las preferencias emitidas.

Una gran parte de las decisiones son tomadas en base a estimaciones. Cuando la problemática a ser analizada es demasiado compleja como para utilizar estimaciones "a priori", se recurre al uso de indicadores con el objetivo de contar con cifras que den información sobre el estado de cosas. Así, la percepción que un individuo pueda tener acerca de cierta realidad depende muchas veces de factores exógenos. Ciertos datos que pretenden mostrar el estado de cosas en la realidad actual, no siempre la reflejan con certeza. Ejemplo de ello son los indicadores utilizados para describir variadas circunstancias, como ser por ejemplo el coeficiente de inteligencia (I.Q.), el producto interno bruto (PIB), el índice de calidad del aire, la cantidad de médicos per cápita, el índice de precios al consumidor, el índice de desarrollo humano, la taza de retorno, y otros, los cuales siempre han de estar sujetos a polémica acerca de su significado real y la medida en la que son capaces de reflejar con certeza aquello que pretenden mostrar. Al ser los índices solo estimaciones de la realidad, siempre han de estar sujetos a cierto grado de incertidumbre referente a su validez en reflejar aquello que pretenden mostrar [Bouyssou, 2000].

Existen diversos tipos de incertidumbre que pueden estar presentes en un proceso de toma de decisiones. El tipo de incertidumbre que más atención ha recibido de parte de la comunidad científica es aquel que puede ser representado en forma de error o rango de validez de un resultado y por lo tanto susceptible a ser analizado por medio de la teoría de las probabilidades. Cuando hablamos de la probabilidad de que suceda un acontecimiento, nos referimos a una estimación acerca de la eventualidad de su ocurrencia, emitida en base a la ocurrencia de eventos similares en el pasado o en base a experimentos repetibles que nos den una idea del posible resultado de un evento real.

Sin embargo, existen otros tipos de incertidumbre que hacen de un proceso de decisión un evento sumamente complicado. Los datos pueden ser ambiguos, vagos o incompletos. La realidad que se quiere observar puede ser de naturaleza tal que no admita descripción numérica. El confort, el bien estar, la vulnerabilidad o la paz social, son conceptos de naturaleza subjetiva de difícil interpretación numérica. Otra importante fuente de incertidumbre son las estimaciones sobre el comportamiento de cierto aspecto en el futuro. Predicciones de ventas futuras, desarrollo de tecnologías, incremento de la población, etc., son datos que son comúnmente utilizados en procesos de toma de decisiones. Los métodos probabilísticos anteriormente mencionados son normalmente utilizados para predecir dichos acontecimientos. Cuando el acontecimiento no es repetible, es decir, cuando la probabilidad no puede ser determinada en base a experimentos, se utilizan estimaciones subjetivas de la realidad emitidas por expertos, quienes expresan su parecer sobre la eventualidad de la ocurrencia futura del acontecimiento, generalmente por medio de una cifra entre cero y uno. Pero sobre este punto surge la pregunta de si el ser humano es capaz de expresar su sentir por medio de cifras. En el fondo, lo que se hace es medir la incertidumbre de ocurrencia de un evento con una cifra que lleva inherente cierto grado de incertidumbre también. Parecería ser que lo natural no es cuantificar la incertidumbre, sino más bien comparar alternativas de acuerdo a percepciones de preferencia subjetivas mediante el uso de frases en vez de números. Este concepto es uno de los pilares de algunas de las teorías más interesantes de los modelos de preferencia y de otras técnicas matemáticas como la teoría de los conjuntos difusos, la cual desarrollaremos oportunamente en otro documento de trabajo.

Como se ha visto hasta el momento, un proceso de decisiones puede presentar variados inconvenientes y dificultades que justificarían el desarrollo de métodos y modelos científicos, con el objetivo de dotar al directivo de adecuadas herramientas de análisis de los elementos que intervienen en el proceso de decisión. La naturaleza subjetiva de la realidad y su incertidumbre inherente, los seudo-razonamientos y trampas mentales, así como la dificultad que conlleva definir criterios y alternativas, son todas buenas razones para utilizar métodos sistemáticos en los procesos de toma de decisiones, cuando la complejidad de los mismos y la importancia de sus consecuencias así lo justifiquen.

II. El desarrollo económico y el desarrollo sostenible en la toma de decisiones

La época en que vivimos está caracterizada por el desarrollo tecnológico, una intensa actividad económica de ciertos grupos de población y un inadecuado patrón de distribución de la riqueza [Munda, 1995] . Si bien la calidad de vida de un porcentaje de la población mundial ha alcanzado niveles nunca antes vistos, la mayor parte de los seres de este planeta aún no gozan de los insumos mínimos para lograr un nivel de vida digno. El crecimiento de la población mundial y el rápido incremento de la actividad económica globalizada han causado en muchos casos la sobreexplotación de los recursos naturales hasta niveles que impiden su renovación. La intensa actividad industrial de transformación de los recursos renovables y no-renovables en productos de consumo ha traído consigo la creación de desechos que pueden llegar a causar cambios en la estructura biológica de este planeta, poniendo en riesgo la integridad física de sus habitantes. La comunidad científica ha observado y consecuentemente dado la voz de alarma, sobre un importante número de efectos nocivos causados por la indiscriminada emisión de sustancias químicas en el medioambiente. El efecto invernadero, la reducción de la capa de ozono, la desaparición irremediable de especies animales y vegetales y el consumo sostenido y creciente de los recursos no-renovables son temas de discusión generalizada.

Paralelamente, también se ha identificado la urgente necesidad de inducir patrones de crecimiento económico en sectores de la población mundial cuyos niveles de vida son inaceptables. La conceptualización general de desarrollo parece sugerir que es deseable lograr que los países menos desarrollados adquieran capacidades industriales que incrementen la generación de recursos económicos, lo cual mejoraría los niveles en cuanto a la calidad de vida en sus pobladores, al menos en teoría. Sin embargo, de continuar con los niveles de polución industrial actual en un escenario de industrialización de los países menos desarrollados, se ocasionaría el deterioro del equilibrio medioambiental del planeta y como consecuencia la eventual insostenibilidad de la existencia de la raza humana. El análisis de esta situación ha demostrado la existencia de un conflicto de intereses entre los sistemas económico, social y medioambiental en todos sus niveles. El estudio de la interrelación entre estos tres sistemas ha mostrado la necesidad de crear patrones de crecimiento económico y de desarrollo humano que no atenten contra la capacidad de las futuras generaciones para satisfacer sus propias necesidades y lograr bienestar. Al estudio de esta problemática se ha denominado "*desarrollo sostenible*".

La gestión del medioambiente por lo general involucra el análisis y la consecuente resolución de los conflictos caracterizados por juicios de valor de tipo técnico, socio-económico, medioambiental y político. Para lograr operacionalizar la gestión medioambiental en un contexto regional, asuntos como integración económico-ecológica, usos múltiples, interrelación espacial interregional e incertidumbre son de fundamental importancia. Por esta razón, en un proceso de planeamiento medioambiental es muy difícil llegar a conclusiones que sean directas y claras, evitando ambigüedades. Esto implica que dicho proceso de planificación multi-relacionado esté siempre caracterizado por la búsqueda de soluciones concertadas, actividad que requiere de metodologías de evaluación adecuadas. Los métodos de decisión con criterios múltiples proveen de una serie de herramientas que ofrecen la flexibilidad necesaria para analizar los efectos de decisiones con connotaciones medio-ambientales, cualitativas y multi-dimensionales.

Desde hace una veintena de años, los estudiosos de temas de desarrollo han comprendido que el bienestar es una variable multi-dimensional, que incluye, inter-alia, conceptos como ingreso promedio, crecimiento, calidad medioambiental, equidad, infraestructura pública, etc. Esto implica que la evaluación sistemática de los planes gubernamentales de desarrollo, así como también de los proyectos de desarrollo, deben basarse en la distinción y consideración de una amplia gama de criterios. Estos criterios generalmente son de diferente naturaleza: los criterios económicos de naturaleza empresarial (privados) como ser costos de inversión o taza de retorno; los de tipo socio-económico, como ser creación de empleo, distribución de ingresos o acceso a salud y educación; los de tipo medioambiental, como ser contaminación, deterioro de áreas verdes y ruido; o innovación tecnológica y riesgo cuando se tratan asuntos energéticos [Munda]. La principal ventaja de un modelo de múltiples criterios es que con él es posible considerar un gran número de datos, relaciones y objetivos, a menudo en conflicto.

III. Principales elementos de un análisis decisorio

Una acción de toma de decisiones surge de la necesidad de resolver algún problema. Dependiendo de la gravedad de las consecuencias de la decisión y de la complejidad del estado de la situación, será necesario un proceso sistemático de análisis, de tal manera que sea posible vislumbrar con la necesaria claridad, la problemática que ocupa. En algunas ocasiones, la simplicidad de los asuntos a ser analizados y la obviedad de la importancia relativa de las alternativas, ocasionarán que la decisión sea tomada directamente, sin la necesidad de un análisis metódico. Este ensayo ha sido preparado para comentar métodos para la toma de decisiones que sean útiles en casos en que la elección de la alternativa correcta presente la complejidad que justifique el uso de dichos modelos de decisión.

Todo proceso de decisión cuenta con ciertos *elementos comunes* que es necesario identificar para lograr un correcto esquema del problema.

La palabra *problema* se define semánticamente como “una cuestión a la que se busca una explicación o respuesta adecuada”. Por lo tanto, llamaremos “problema” al asunto que deseamos resolver con un proceso de toma de decisiones. *Problemática* es un conjunto de problemas, de manera que designaremos así a la interrelación de aquellas cuestiones que debamos resolver en el proceso. Generalmente, los problemas son identificados a raíz de la existencia de alguna *necesidad insatisfecha* y sentida por un grupo de personas que ejercen cierta influencia en el entorno de acción de la entidad que tiene a su cargo la resolución del problema.

Llamaremos *Involucrado* a todo aquel grupo de personas que se vea afectado por las consecuencias de la decisión tomada, o que pueda afectar de alguna manera el proceso de la toma de decisiones. Estos grupos de involucrados pueden estar compuestos por un solo individuo o por varios individuos que tengan intereses comunes, como en el caso de accionistas de empresas, organizaciones laborales o grupos sociales, por poner algún ejemplo. Aquellos grupos de involucrados que tengan la facultad de intervenir directa o indirectamente en el proceso de la toma de decisiones serán llamados *actores* de la decisión. Los grupos de involucrados que no intervengan en la toma de decisiones pero que se vean afectados por el resultado de la misma, serán llamados *involucrados pasivos*. Así, el conjunto de los grupos de involucrados se divide en un subconjunto de actores y un subconjunto de involucrados pasivos.

Toda decisión tendrá que ser tomada por alguien. Un individuo o un conjunto de individuos que tengan la potestad y la libertad de acción para llevar a cabo aquello que se decida. Nosotros llamaremos *directivo* a este individuo o grupo de individuos encargado de tomar la decisión y lo denotaremos como D.

Los otros dos elementos que necesariamente forman parte de un proceso de decisión son: los criterios y las alternativas. Llamamos *alternativa* a aquella acción u objeto de decisión que constituya una opción para la solución del problema planteado. El termino alternativa podría ser reemplazado por los términos escenario, plan, programa, proyecto, propuesta, variante, dossier, operación, inversión, solución o candidato, dependiendo de la situación. Formalmente, podemos definir el conjunto de acciones $A=\{a_1,...a_i,...,a_n\}$, como el conjunto de objetos, decisiones, candidatos, etc., a ser evaluados durante el proceso de toma de decisiones. Este conjunto puede estar especificado mediante una lista de sus miembros, cuando esto sea posible, o mediante las propiedades que caracterizan a sus miembros cuando el número de estos sea demasiado grande o infinito.

El propósito de un proceso de toma de decisiones es el de evaluar cada uno de los elementos del conjunto de alternativas con respecto a la consecución de un objetivo principal, el cual estará relacionado con la solución al problema planteado. Sin embargo, normalmente existen varios factores o puntos de vista, diferentes en su naturaleza, que intervienen en la problemática a ser analizada. Dado que la palabra *criterio* esta definida como "la norma intelectual para juzgar o para decidir", nosotros llamaremos así a todo aquel factor o punto de vista que deba ser considerado en el proceso de decisión, con el objeto de solucionar el problema planteado, y lo denotaremos de forma genérica como g_j. El conjunto de criterios será llamado *criteriología* y estará denotado por $G=\{g_1,...,g_j,...,g_m\}$.

Dependiendo del modelo empleado en la evaluación de las alternativas con respecto a los diferentes criterios, se tendrá que definir un conjunto de indicadores de desempeño o “performances” de cada alternativa, con respecto a cada uno de los criterios. Este conjunto estará denotado por $Ga_i=\{g_1(a_i),...,g_j(a_i),...,g_m(a_i)\}$. De este modo, el elemento $g_j(a_i)$ representa el desempeño de la alternativa a_i con respecto al criterio g_j.

En algunos casos (en algunos modelos) se podrá definir cierta *ponderación relativa* respecto a la importancia de las alternativas con respecto a un criterio definido. Denotaremos $P_j=\{p_j(a_1),...,p_j(a_i),...,p_j(a_n)\}$ al conjunto de dichas ponderaciones relativas respecto al criterio g_j. Cuando se trate de la ponderación general, la denotaremos simplemente como $P=\{p(a_1),...,p(a_i),...,p(a_n)\}$.

IV. Estructuración de un proceso de preferencias

Así como pueden ser identificados los elementos que intervienen en un proceso de toma de decisiones, también pueden ser esquematizadas las diferentes fases que componen dicho proceso. De ninguna manera un proceso de toma de decisiones es un proceso lineal en el que una etapa sucede a la otra. Más bien es un proceso interactivo que consiste en identificar paulatinamente aquellos elementos útiles, definirlos, analizarlos y evaluar las alternativas en base a la información captada. En términos generales, se han identificado las siguientes fases:

Fase Q: Conceptualización general: Que?, Cuando?, Donde?, Quien?, Como?, Por que?...
Fase C: Definición de criterios, puntos de vista o factores críticos de éxito.
Fase I: Identificación de los involucrados (actores e involucrados pasivos), así como del actor principal o directivo.
Fase A: Identificación de las alternativas.
Fase D: Identificación de indicadores y construcción de una tabla de desempeño.
Fase M: Elección y aplicación del modelo matemático.
Fase R: Recomendación en base a los resultados del modelo.

Será fuente de interesantes actividades de investigación el desarrollar metodologías para cada una de las fases cuando se trata de problemas específicos como ser el Desarrollo Sostenible.

V. Ayuda a la toma de decisiones

Un modelo de preferencias NO es una caja negra. Proveer soporte en el desarrollo de un proceso de decisión involucra mucho más que la mera aplicación de herramientas técnicas para “resolver” algún problema de características bien definidas [. Un proceso de ayuda en la toma de decisiones es la actividad efectuada por un facilitador, cuyo objetivo es aportar claridad en un proceso de decisión inicialmente pobremente estructurado, mediante el uso de adecuadas herramientas técnicas y metodológicas. Los modelos de decisión son modelos matemáticos que, valga la redundancia, ayudan al facilitador a ayudar al directivo a tomar una decisión. Un proceso de ayuda a la toma de decisiones es casi un arte en el que intervienen tanto las cualidades técnicas del facilitador, como sus condiciones de trato y comportamiento para lograr una actitud de cooperación y honestidad entre quienes intervienen en el análisis de la situación y la toma de decisiones propiamente dicha. El facilitador deberá, además, adquirir el conocimiento básico requerido para comprender a cabalidad el asunto que es sujeto de análisis. Un proceso de ayuda a la toma de decisiones no es la mera aplicación de un modelo matemático con la finalidad de tomar una decisión en base a los resultados del modelo, sino más bien es la estructuración de una problemática con la finalidad de brindar, mediante herramientas técnicas, claridad acerca de la conveniencia de escoger una de las alternativas disponibles.

VI. Conceptos básicos de los modelos de preferencias

Todo proceso de decisión involucra el acto de comparar. Cuando comparamos dos opciones cualesquiera (*a*,*b*), el resultado de la comparación puede ser uno de los siguientes enunciados [Vinke, 1992]:

- ✓ "*prefiero a que b*"
- ✓ "*soy indiferente entre a y b*"
- ✓ "*no puedo o no quiero comparar a y b*"

Formalmente, adoptaremos la siguiente simbología:

$\forall\ a,b \in$ A: $a\mathrm{P}b$ si a es estrictamente preferido a b
$a\mathrm{I}b$ si a y b son equivalentes (relación de indiferencia)
$a\mathrm{R}b$ si a y b son incomparables

P, I y R representan lo que se conoce como "*relaciones de preferencia*".

Para explicar el concepto de "*relación*" vamos a presentar el siguiente ejemplo:

Existen dos conjuntos A y O, tal que

Conjunto A: {mujer_1, mujer_2, mujer_3}
Conjunto O: {hombre_1, hombre_2, hombre_3}

Entre los elementos del conjunto A y los del conjunto O pueden formarse pares de elementos que tengan la característica de haber suscrito un contrato legal denominado "matrimonio".

Formalmente:

$\forall\ \text{hombre}_i \in \text{O}$ y $\text{mujer}_j \in \text{A}$, con i=1,2,3, j=1,2,3; $\exists \text{M} \mid \text{hombre}_i \text{M} \text{mujer}_j \Leftrightarrow \text{hombre}_i$ y mujer_j están casados.

La relación M se define como la "*relación de matrimonio*". Del mismo modo se pueden definir las relaciones de amistad, infidelidad, noviazgo, parentesco, etc., etc.

Volviendo a nuestro campo, las tres relaciones de preferencia {P,I,R} conforman lo que se denomina *estructura de preferencia* si cumplen las siguientes propiedades:

- P es asimétrica ($a\mathrm{P}b \Rightarrow b \sim\mathrm{P}\ a$, entendiéndose ~P como la relación de "*no preferencia*")
- I es irreflexiva ($a\mathrm{I}a$)
- I es simétrica ($a\mathrm{I}b \Rightarrow b\mathrm{I}a$)
- R es irreflexiva ($a \sim\mathrm{R}\ a$, entendiéndose ~R como la relación de "comparabilidad")
- R es simétrica ($a\mathrm{R}b \Rightarrow b\mathrm{R}a$)
- Solo una de las siguientes propiedades es verdadera: $a\mathrm{P}b$, $b\mathrm{P}a$, $a\mathrm{I}b$, $a\mathrm{R}b$.

Existe además otra relación, denotada por Q, denominada "*relación de preferencia débil*" y definida como sigue:

$$a\mathrm{Q}b \Leftrightarrow a\mathrm{P}b \text{ ó } a\mathrm{I}b \ (\mathrm{S}=\mathrm{P}\cup\mathrm{I})$$

De esta definición se puede inferir lo siguiente:

$$a\mathrm{P}b \Leftrightarrow a\mathrm{Q}b \text{ y } b\sim\mathrm{Q}a$$
$$a\mathrm{I}b \Leftrightarrow a\mathrm{Q}b \text{ y } b\mathrm{Q}a$$
$$a\mathrm{R}b \Leftrightarrow a\sim\mathrm{Q}b \text{ y } b\sim\mathrm{Q}a$$

Cabe hacer notar que Q es generalmente conocida como "*relación de preferencia débil*", en contraste con P que se conoce como "*relación de preferencia estricta*".

Históricamente, lo que tradicionalmente se ha hecho en cuanto a la modelación de las preferencias en un proceso de toma de decisiones es representar el problema como un proceso de optimización de alguna función *g* definida dentro del conjunto de alternativas A. Este proceso es ampliamente utilizado en el campo de la Investigación de Operaciones.

Es decir, para el caso de maximización:

$$a\mathrm{P}b \Leftrightarrow g(a) > g(b), \text{ estricta preferencia}$$
$$a\mathrm{I}b \Leftrightarrow g(a) = g(b), \text{ indiferencia}$$
$$a\mathrm{S}b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b), \text{ preferencia débil}$$

Este modelo de preferencias está basado en la idea de que el directivo trata, consciente o inconscientemente, de maximizar una función *g* que engloba los diferentes puntos de vista que han sido tomados en cuenta en el proceso. Este tipo de razonamiento es utilizado en países de habla inglesa y ha sido usado para construir modelos económicos de uso común.

Cuando comparamos dos alternativas, existe un rango de variación de sus características dentro del cual las alternativas nos parecen iguales. Podemos ejemplificar esto con el experimento de la taza de café:

Se nos presentan dos tazas de café, cada una de ellas endulzada con una cucharilla de azúcar. Nuestra tarea es decidir cual de ellas es más dulce. Como las dos tienen exactamente la misma cantidad de azúcar, nuestra respuesta será que las dos tazas tienen el mismo sabor, o en otras palabras, que somos indiferentes respecto a las dos tazas de café. Posteriormente se nos presentan las mismas tazas de café, pero a una de ellas se le han agregado 10 granos de azúcar. Estos diez granos hacen tan poca diferencia, que nuestra respuesta en este caso probablemente será también que las dos tazas de café son iguales respecto a su sabor dulce. Es decir, nuestra sensibilidad en cuanto a la percepción del azúcar que contiene cada taza no alcanza a diferenciar entre una cucharilla de azúcar y una cucharilla de azúcar más diez granos. Si continuamos incrementando la cantidad de azúcar añadida a una de las tazas de café, llegará un momento en el que podremos identificar cual de ellas es la que contiene más azúcar.

Para considerar este fenómeno en un proceso de comparación de alternativas se ha ideado el uso de lo que se llama "*umbral de indiferencia*", que consiste en definir un intervalo o rango, denotado como q, dentro del cual dos alternativas son aparentemente iguales. Esto se conoce como *modelo del umbral de indiferencia*.

Formalmente, $a\mathrm{P}b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q$

$$a\mathrm{I}b \Leftrightarrow |\, g(a) - g(b) \,| \leq q$$

Una adecuación de este modelo resulta cuando se considera un umbral que tenga la capacidad de variar conforme a la magnitud de la escala escogida. En efecto, el "*modelo del umbral de indiferencia variable*" puede ser esquematizado como sigue:

$$a\mathrm{P}b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b))$$
$$a\mathrm{I}b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(g(b))$$
$$a\mathrm{I}b \Leftrightarrow g(b) \leq g(a) + q(g(a)),$$

siendo q una función de $g(.)$.

Sea el umbral de tipo fijo o variable, su utilización sugiere la existencia de un nivel preciso debajo del cual predomina la relación de indiferencia y sobre el cual predomina la relación de preferencia. Sin embargo, a menudo hay una zona intermedia entre preferencia e indiferencia, dentro de la cual el directivo duda al dar su opinión o da opiniones contradictorias dependiendo de la forma en que se le hacen las preguntas sobre un mismo sujeto. Esta observación conduce a la introducción de un modelo de preferencias que utiliza dos umbrales diferentes: el umbral de indiferencia y el umbral de preferencia. El umbral de preferencia se define como aquel nivel sobre el cual el directivo está seguro de su estricta preferencia de una alternativa sobre la otra. Formalmente:

$$aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(g(b))$$
$$aQb \Leftrightarrow g(b) + p(g(b)) \geq g(a) > g(b) + q(g(b))$$
$$aIb \Leftrightarrow \begin{cases} g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \\ g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \end{cases}$$

La relación Q, denominada r*elación de preferencia débil* expresa (modela) la duda del directivo al momento de emitir su opinión acerca de su preferencia o su indiferencia.

Adicionalmente a los conceptos transmitidos hasta aquí, es útil hacer notar que al momento de emitir un juicio de preferencias el directivo puede no ser capaz de hacerlo (por ejemplo por falta de información) o simplemente no desear hacerlo (por razones contextuales). Esta situación ha sido modelada utilizando la relación R, denominada *relación de incomparabilidad*. La relación de incomparabilidad aparece frecuentemente cuando la problemática involucra varios directivos con opiniones contradictorias. Los trabajos de investigación al respecto no han sido abundantes y aún queda mucho por hacer en este sentido.

VII. Algunos modelos de preferencias

A continuación se presenta el resumen del marco conceptual de algunos de los modelos de preferencias más conocidos dentro de la comunidad científica Europea. Lo presentado a continuación no pretende ser el desarrollo exhaustivo y detallado de dichos modelos de preferencia, sino más bien dar a conocer cómo han sido conceptualizados los procesos de toma de decisiones y cómo estos conceptos han sido traducidos al lenguaje matemático y convertidos en modelos sistemáticos.

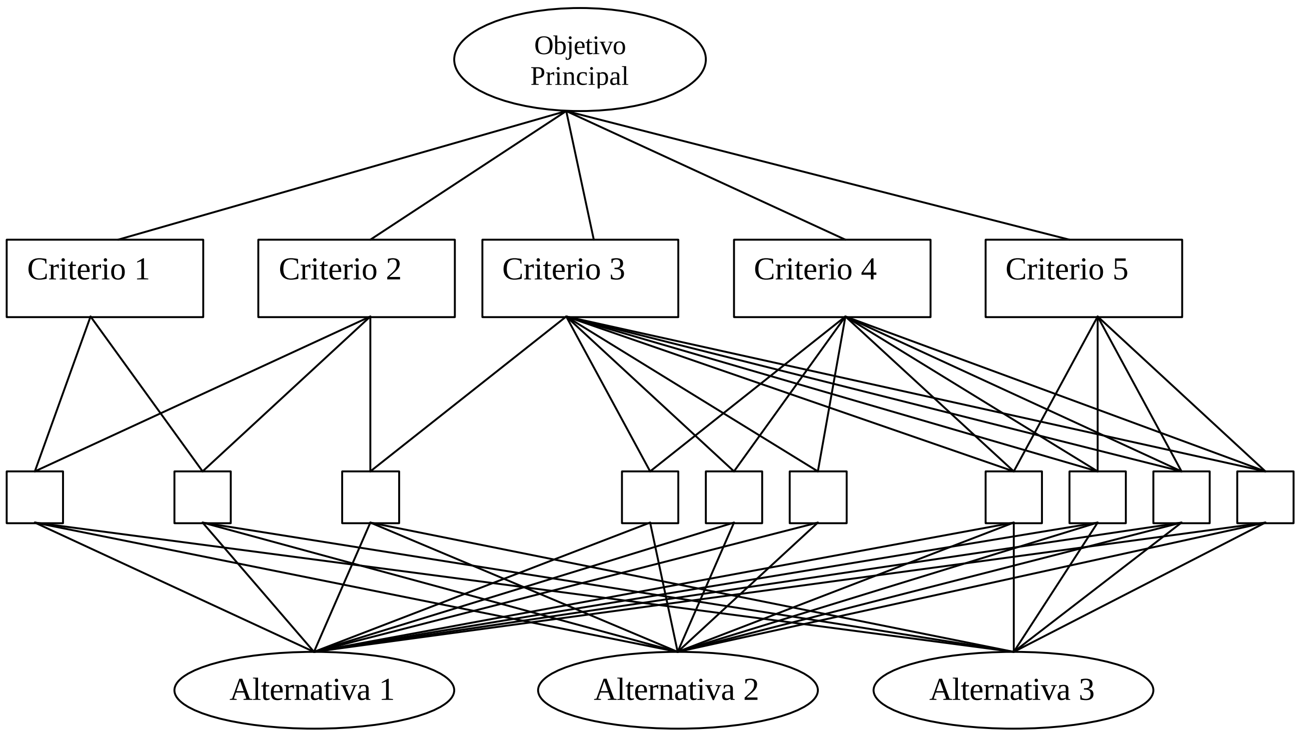
a. Fundamentos del Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1971)

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP en sus siglas por Analytic Hierarchy Process) es un método matemático creado para evaluar alternativas cuando se tienen en consideración varios criterios. En ocasiones, la naturaleza del problema obliga a considerar criterios de naturaleza "intangible", es decir, aquellos criterios cuya cuantificación es, cuado menos, difícil. Ejemplo de ello son conceptos como el confort, el bienestar, la salud, la vulnerabilidad, la percepción que un cliente tenga sobre la imagen medioambiental de una empresa, la capacidad de gestión de una alcaldía, la corrupción, la dedicación de un estudiante o un funcionario público, el sabor de una bebida y tantos otros cuya consideración sería de gran utilidad de ser tomados en cuenta en el proceso de toma de decisiones. El Proceso Analítico Jerárquico propone una metodología especialmente útil para este efecto, pues está basado en el principio de que la experiencia y el conocimiento de los actores son tan importantes como los datos mismos utilizados en el proceso [Forman, 1990].

La aplicación del modelo se lleva a cabo generalmente en dos etapas:

- el diseño de la jerarquía
- el proceso de evaluación, este último de naturaleza matemática.

La fase de diseño de la jerarquía consiste en un proceso interactivo en el que se identifican todos los elementos que intervienen en el proceso de la toma de decisiones, para luego ordenarlos en niveles que esquematicen y describan la problemática, como se ilustra a continuación. Nosotros hemos denominado este proceso como fases Q, C, I y A.



El primer paso consiste en identificar todos los elementos que intervienen en el proceso de toma de decisiones e identificar también los niveles en que estos elementos pueden ser agrupados de forma jerárquica. Este esquema en forma de árbol resume las interrelaciones entre los componentes del problema que se quiere resolver. Hay completa libertad para construir la jerarquía. Es muy posible que dos personas conceptualicen el problema de formas diferentes y por ende que construyan dos jerarquías diferentes. Sin embargo, lo deseable es que la jerarquía sea construida en consenso tomando en consideración las opiniones de todos los involucrados. Como se ve en el dibujo, en la parte superior del árbol debe figurar siempre el objetivo principal. En los niveles inferiores podrán figurar el conjunto de criterios, el conjunto de los diferentes grupos de involucrados o los sub-criterios relacionados con algún criterio específico. Finalmente, en el nivel de base deberán figurar las diferentes alternativas. No existe restricción respecto a la cantidad de niveles ni al número de elementos de cada nivel. La fase de diseño de la jerarquía obliga a encarar un profundo análisis de los factores de influencia en el problema. Normalmente, la sola finalización de esta fase brinda claridad y entendimiento sobre los componentes del problema que se está analizando y seguramente no es raro que el proceso de decisión finalice aquí.

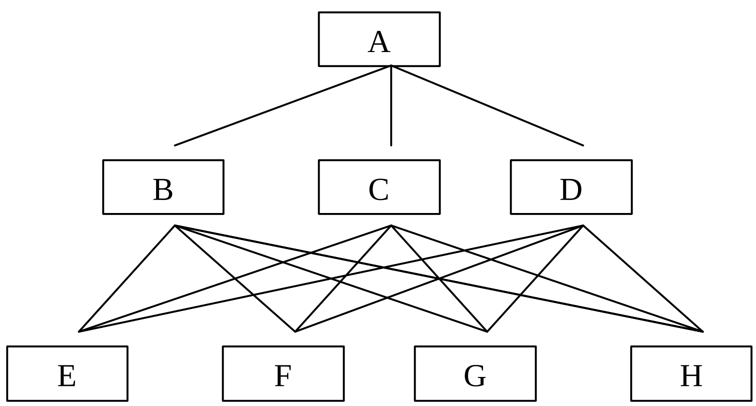
Las representaciones jerárquicas tienen importantes ventajas cuando se trata de analizar problemas y encarar procesos de decisión [Saaty, 1980]:

1. La representación jerárquica de un sistema puede ser usada para describir cómo los cambios en prioridades a niveles superiores pueden afectar a los elementos de niveles inferiores.

2. Las representaciones jerárquicas dan importante información detallada acerca de la estructura y funcionamiento de un sistema y además permiten tener una vista panorámica de los actores y sus respectivos objetivos y propósitos.

3. Las representaciones jerárquicas permiten tener la flexibilidad necesaria para encarar procesos interactivos sin que la adición o sustracción de algún elemento afecte fundamentalmente la estructura completa.

Una vez que ha sido finalizada la fase de diseño de la jerarquía, se procede a una segunda fase de naturaleza matemática, que corresponde a la evaluación de la importancia de las alternativas respecto a todos los elementos que intervienen en el problema y que están representados en los niveles superiores del árbol. Para ilustrar esta fase, que nosotros hemos denominado "Fase M" y que es de naturaleza matemática, tomaremos como ejemplo la siguiente jerarquía, útil por su simplicidad:



Como se puede observar, A representa el objetivo principal pues está situado en la cima del árbol. En general, B, C y D son elementos que ejercen influencia directa sobre el elemento A. Los elementos B, C y D podrían ser, por ejemplo, los criterios de selección o los grupos de involucrados. Los elementos E, F, G y H ejercen influencia directa sobre B, C y D. Los elementos E, F, G y H, por estar situados en la base de la jerarquía, representan las diferentes alternativas. En este caso la jerarquía está compuesta por tres niveles, pero en problemas reales la cantidad de niveles dependerá de la complejidad del problema.

Una de las características importantes del Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es que utiliza comparaciones biunívocas, es decir, comparaciones entre pares de elementos (también llamadas comparaciones uno a uno). En base a estas comparaciones biunívocas y mediante el uso de la teoría de matrices, el modelo es capaz de establecer prioridades entre los elementos de un nivel, con respecto a un elemento del nivel inmediato superior. Cuando las prioridades de los elementos de cada nivel han sido determinadas, se utiliza un procedimiento de agregación para obtener las prioridades de las alternativas con respecto al objetivo principal. En otras palabras, en base a la determinación de las prioridades de los elementos de los diferentes niveles de la jerarquía, el modelo permite determinar el grado de preferencia global de las alternativas.
Para ilustrar el procedimiento de comparaciones biunívocas comenzaremos por comparar los elementos del segundo nivel (B, C y D) con respecto al objetivo principal A. El facilitador tendrá que hacer preguntas como las siguientes:

- Con respecto a A, cual es más importante, B o C?
- Si la respuesta ha sido B: Cuanto más importante es B que C?

La forma más fácil de responder la segunda pregunta es, sin duda, haciendo uso de frases del lenguaje común, que describan nuestras preferencias subjetivas. Probablemente nos sentiríamos cómodos respondiendo algo como "*B me gusta un poco más que C*" o "*me parecen casi iguales, pero B es un poco mejor*" o "*B es mucho mejor que C*". Para este efecto, el modelo provee una tabla con la cual deben hacerse estas comparaciones sujetivas biunívocas:

Escala Numérica	**Escala Verbal**	**Interpretación**
1	**Igual** importancia de ambos elementos	Los dos elementos contribuyen de igual forma al objetivo
3	**Moderada** importancia de un elemento sobre el otro	La experiencia y el juicio favorecen levemente a un elemento sobre el otro
5	**Fuerte** importancia de un elemento sobre el otro	Uno de los elementos es fuertemente favorecido
7	**Muy fuerte** importancia de un elemento sobre el otro	Uno de los elementos es fuertemente dominante
9	**Extrema** importancia de un elemento sobre el otro	La evidencia que favorece a uno de los elementos es del mayor orden de afirmación.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios	Usados para juicios intermedios

Estudios psicométricos han demostrado que la habilidad del ser humano para establecer distinciones cualitativas entre pares de objetos puede ser representada adecuadamente mediante cinco atributos: *igual, débil, fuerte, muy fuerte* y *absoluto*. Existe un límite psicológico de 7±2 ítemes cuando se trata de hacer comparaciones simultáneas, lo que sugiere que podemos tener hasta 9 puntos de referencia diferentes para describir nuestras preferencias cualitativas.

Cada una de las expresiones semánticas de la escala verbal tiene asociado un número que representa el valor de esa expresión semántica. Por ejemplo, "*fuerte importancia*" vale 5.

Volviendo al ejemplo, después de haber efectuado todas las comparaciones de los elementos del segundo nivel (B, C, D) respecto al elemento A, se tiene la siguiente *matriz de comparaciones biunívocas*:

A	**B**	**C**	**D**
B	Igual	Moderada	Fuerte
C		Igual	Moderada
D			Igual

Esta matriz expresa que, con respecto al objetivo A, B es "moderadamente mejor" que C, B es "fuertemente mejor" que D y C es "moderadamente mejor" que D.

Reemplazando las expresiones semánticas por sus respectivos valores, tenemos la siguiente matriz:

A	**B**	**C**	**D**
B	1	3	5
C	1/3	1	3
D	1/5	1/3	1

Esta matriz nos indica que, en base a las percepciones subjetivas emitidas por el directivo, B=3C y C=3D. Reemplazando valores, deberíamos tener que B=3(3D)=9D, pero lo que tenemos realmente en la matriz es B=5D. Esto se conoce como *matriz inconsistente* y es un fenómeno cuyo efecto se calcula haciendo uso de los conceptos de *vector característico* y *valor característico* de la teoría de matrices, como se explica a continuación:

> Un *vector característico* w de una matriz M es un vector tal que $Mw=\lambda w$. Los valores del parámetro λ correspondientes al vector w son denominados *valores característicos* de M. En otras palabras, w es un vector característico de M si es una solución no trivial de $(M-\lambda I)w=0$, siendo I la matriz identidad. Los componentes de w constituyen un conjunto de soluciones de un sistema lineal con la matriz $(M-\lambda I)$. Este sistema posee la solución trivial $w=(w_1,...,w_0)=(0,...,0)$. Para evitar la presencia de la solución trivial en el conjunto de soluciones del sistema, la matriz $(M-\lambda I)$ debe ser una matriz singular, i.e. su determinante $|M-\lambda I|$ debe ser igual a cero. Este determinante es en realidad una función polinomial de grado n en λ, de la forma $\lambda^n-m_1\lambda^{n-1}+...+(-1)(|M|)$. Esta función se denomina *función polinomial característica* de M. La condición $|M-\lambda I|=0$ conduce a una ecuación de grado n, llamada *ecuación característica* de M, la cual es igual a cero si λ es reemplazada por M, produciendo entonces una ecuación matricial. Las raíces λ_i correspondientes a la ecuación característica $|M-\lambda I|=0$, con i=1,...,n, son los denominados *valores característicos*. Como es bien conocido, el Teorema

Fundamental del Álgebra asegura la existencia de n raíces para una ecuación polinomial de grado n. Los vectores característicos se obtienen de la resolución de los sistemas de ecuaciones correspondientes $Mw_i=\lambda_i w_i$.

Consideremos los elementos $C_1,...,C_n$ de algún nivel en la jerarquía. Denotamos m_{ij} como el elemento que representa la importancia de C_i respecto a C_j y M es la matriz conformada por dichos elementos. Esta matriz es recíproca, i.e. $m_{ij}=1/m_{ji}$:

M	**C_1**	**...**	**C_i**	**...**	**C_n**
C_1	m_{11}	...	m_{1i}	...	m_{1n}
...	...	...	...	...	...
C_j	$1/m_{1i}$	...	m_{ji}	...	m_{jn}
...	...	...	...	...	...
C_n	$1/m_{1n}$	...	$1/m_{jn}$	...	m_{nn}

Si la matriz M es perfectamente consistente, entonces $m_{ik}=m_{ij}\cdot m_{jk}$ $\forall i,j,k$. Si $\lambda_1,...,\lambda_n$ son los valores característicos de M y si $m_{ii}=1$ $\forall i$, entonces $(\lambda_1+...+\lambda_n)=\lambda_{max}$, siendo λ_{max} el mayor valor característico de M. Está demostrado en la teoría de matrices que si los valores m_{ij} de una matriz recíproca M son modificados en pequeñas cantidades, los valores característicos resultantes también cambian en pequeñas cantidades. Entonces, si M es consistente, pequeñas variaciones en los valores de m_{ij} mantienen a λ_{max} cercano a $(\lambda_1+...+\lambda_n)$. Por lo tanto, la diferencia $(\lambda_1+...+\lambda_n)-\lambda_{max}$ es una medida del grado de consistencia de la matriz M. Si denotamos $(\lambda_1+...+\lambda_n)=n$, el índice de consistencia $I.C.=(\lambda_{max}-n)/(n-1)$ mide el grado de consistencia de la matriz M. Para determinar cuán consistente es la matriz M, deberemos comparar su I.C. con el I.C. de una matriz reciproca del mismo orden cuyos elementos han sido determinados en forma aleatoria. Este índice de consistencia de la matriz aleatoria es llamado *índice aleatorio* (I.A.) y sus valores están previamente determinados, de acuerdo con el orden de cada matriz:

Orden de la matriz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I.A.	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

El principal propósito que se persigue con la aplicación de este modelo es encontrar las ponderaciones de importancia de los elementos de los respectivos niveles de la jerarquía, $W_{1/X},...,W_{n/X}$ con respecto a algún elemento "X" del nivel inmediato superior. Como se ha descrito antes, la principal herramienta es una matriz numérica que representa los resultados de preferencias de las comparaciones biunívocas. En base a razonamiento teórico que omitimos en este trabajo, se escoge el *vector característico* correspondiente al *valor característico mayor* como el vector que representa las ponderaciones de importancia de los elementos $C_1,...,C_n$. En otras palabras, las ponderaciones de importancia son calculadas mediante el vector característico de la matriz de comparaciones biunívocas.

Continuando con el ejemplo, las matrices resultantes de las comparaciones biunívocas y sus respectivos vectores característicos son como sigue:

A	B	C	D	Ponderaciones
B	1	$m_{bc/a}$	$m_{bd/a}$	$W_{B/A}$
C	$m_{cb/a}$	1	$m_{cd/a}$	$W_{C/A}$
D	$m_{db/a}$	$m_{bc/a}$	1	$W_{D/A}$

B	E	F	G	H	Ponderaciones
E	1	$m_{ef/b}$	$m_{eg/b}$	$m_{eh/b}$	$W_{E/B}$
F	$m_{fe/b}$	1	$m_{fg/b}$	$m_{fh/b}$	$W_{F/B}$
G	$m_{ge/b}$	$m_{gf/b}$	1	$m_{gh/b}$	$W_{G/B}$
H	$m_{he/b}$	$m_{hf/b}$	$m_{hg/b}$	1	$W_{H/B}$

C	E	F	G	H	Ponderaciones
E	1	$m_{ef/c}$	$m_{eg/c}$	$m_{eh/c}$	$W_{E/C}$
F	$m_{fe/c}$	1	$m_{fg/c}$	$m_{fh/c}$	$W_{F/C}$
G	$m_{ge/c}$	$m_{gf/c}$	1	$m_{gh/c}$	$W_{G/C}$
H	$m_{he/c}$	$m_{hf/c}$	$m_{hg/c}$	1	$W_{H/C}$

D	E	F	G	H	Ponderaciones
E	1	$m_{ef/d}$	$m_{eg/d}$	$m_{eh/d}$	$W_{E/D}$
F	$m_{fe/d}$	1	$m_{fg/d}$	$m_{fh/d}$	$W_{F/D}$
G	$m_{ge/d}$	$m_{gf/d}$	1	$m_{gh/d}$	$W_{G/D}$
H	$m_{he/d}$	$m_{hf/d}$	$m_{hg/d}$	1	$W_{H/D}$

Finalmente, para calcular las preferencias relativas globales de las alternativas E, F, G y H, se sigue el siguiente procedimiento de agregación:

Ponderación global de la alternativa E: $W_{B/A}\cdot W_{E/B}+W_{C/A}\cdot W_{E/C}+W_{D/A}\cdot W_{E/D}$
Ponderación global de la alternativa F: $W_{B/A}\cdot W_{F/B}+W_{C/A}\cdot W_{F/C}+W_{D/A}\cdot W_{F/D}$
Ponderación global de la alternativa G: $W_{B/A}\cdot W_{G/B}+W_{C/A}\cdot W_{G/C}+W_{D/A}\cdot W_{G/D}$
Ponderación global de la alternativa H: $W_{B/A}\cdot W_{H/B}+W_{C/A}\cdot W_{H/C}+W_{D/A}\cdot W_{H/D}$

b. Fundamentos del Método Electre III (Roy, 1978)

Consideremos la situación en la que queremos comparar dos alternativas *a* y *b* ($a,b \in A$) sobre la base de sus respectivos conjuntos de indicadores de desempeño G*a* y G*b*. Las preferencias del directivo D en relación con *a* y *b* podrían no estar claramente definidas, situación que se presenta comúnmente en los procesos de decisión debido a la existencia de incertidumbre en los datos y en el proceso mismo. El método *Electre* fue creado para permitir que sea considerada la dificultad que podría tener el directivo D para emitir un juicio claro y si ambigüedades sobre su preferencia entre *a* y *b*. Este modelo de preferencias, no pretende ser una descripción exacta de las preferencias claramente establecidas en la mente de un directivo determinado. En estas condiciones, el método general de preferencias debería permitirnos tomar en cuenta la falta de una idea clara (titubeo) sobre las preferencias entre dos de los tres casos siguientes [Vinke 1992]:

*a*I*b*: *a* es equivalente a *b* (indiferencia entre *a* y *b*)
*a*P*b*: *a* es preferido a *b*
*b*P*a*: *b* es preferido a *a*

Si D es un directivo colectivo, inaccesible o vagamente determinado, este modelo es solo un sistema de preferencias con el cual es posible operar con el objetivo de visualizar y concatenar los elementos de respuesta a ciertas preguntas, emitidas con el propósito de conocer mejor la situación y tener una idea más clara de las preferencias inherentes al caso.

Existen dos situaciones en las que el directivo D puede tener dificultades para expresar su preferencia entre *a* y *b*:

El caso de *preferencia débil*, conocido como “relación Q”: *a*Q*b* si el titubeo se presenta entre *a*I*b* y *a*P*b*.

El caso de *incomparabilidad*, conocido como “relación R”: *a*R*b* si el titubeo se presenta entre *b*P*a* y *a*P*b*.

La contribución del método Electre es la introducción de una nueva relación, conocida como la *relación de la categoría superior (o super-categoría)*, denotada por la letra S.

Aquí vale la pena hacer un pequeño paréntesis. La palabra “*super-categoría*” y sus derivadas utilizadas con bastante frecuencia en este texto provienen de una traducción de la palabra “*outrank*”, cuyo significado es “ser de mayor jerarquía que”. Al parecer no existe una palabra en español que exprese este concepto y por ese motivo se utiliza el término “super-categoría”, que si bien es algo extraño, expresa muy bien lo que se quiere decir.

Cada criterio g_j puede tener asociada una relación de super-categoría S_j exclusiva para ese criterio. Por definición, la relación aS_jb es verdadera cuando los valores de desempeño G*a* y G*b* presentan suficientes argumentos como para considerar que, en la mente del directivo D, el siguiente enunciado es cierto:

“*a*, con respecto al criterio g_j solamente, es AL MENOS tan bueno como *b*”

La expresión “*al menos tan bueno como*” es equivalente a la expresión “*no peor que*”. La diferencia con expresiones como “*es mejor que*” o “*es peor que*” consiste en que estas últimas expresan una opinión emitida con toda seguridad, sin dudas ni titubeos.

Tomando en cuenta la familia completa de criterios G (que habíamos denominado criteriología), es posible definir una relación general de super-categoría S, la cual se define como sigue:

*a*S*b* es una relación binaria que es verdadera si los valores de desempeño en G*a* y G*b* dan razones o argumentos suficientemente poderosos como para considerar como verdadero el siguiente enunciado en la mente del directivo D:

"*a*, con respecto a todos los criterios, es AL MENOS tan bueno como *b*"

La relación de super-categoría es entonces una relación binaria S definida en A, tal que: *a*S*b* si, dado lo que es conocido sobre las preferencias del directivo D y dada la calidad de las evaluaciones y la naturaleza del problema, se cuenta con suficientes argumentos como para decidir que *a* es al menos tan bueno como *b*, no habiendo en cambio ninguna razón esencial para refutar dicho enunciado.

Formalmente: $a\mathrm{S}b\ \forall g_j \in \mathrm{G} \Rightarrow a\mathrm{S}b$.

La relación de *super-categoría valorada* que nos presenta el método Electre III se caracteriza por la definición de un *grado de super-categoría*, denotado por S(*a,b*), asociado a cada par ordenado de acciones (*a,b*). S(*a,b*) representa la mayor o menor credibilidad en cuanto a la super-categorización de *a* sobre *b*.

La naturaleza de las condiciones que deben ser satisfechas para validar el enunciado *a*S*b* pueden ser influenciadas por diversos tipos de factores. Algunos de ellos pueden ser por ejemplo el grado de significación de los criterios tomados en cuenta en G, la intensidad de las preferencias, la concordancia o discordancia de *a*S*b* respecto al conjunto de criterios, la naturaleza de la información inter-criterios, así como la fortaleza de los argumentos requeridos para dar como válida una relación S. Estos conceptos son modelados matemáticamente utilizando los conceptos que se explican a continuación.

Habiéndose asociado una *ponderación* p_j a cada criterio g_j, el siguiente *índice de concordancia* es calculado para cada par ordenado de alternativas (*a,b*):

$$c(a,b)=(1/P)\sum^{n}_{j=1} p_j c_j(a,b),$$

donde: $P=\sum^{n}_{j=1} p_j$

$$c_j(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ si } g_j(a)+q_j(g_j(a)) \geq g_j(b) \\ 0 \text{ si } g_j(a)+p_j(g_j(a)) \leq g_j(b) \\ \text{lineal entre los dos.} \end{cases}$$

q_j y p_j denotan los *umbrales de indiferencia y preferencia* respectivamente.

Por definición, el índice de concordancia c(*a,b*) caracteriza el "énfasis" con que los argumentos favorables son capaces de validar el enunciado *a*S*b*.

La definición de *discordancia* requiere de la introducción de un *umbral de veto* $v_j(g_j(a))$ (función de $g_j(a)$) para cada criterio g_j, tal que la credibilidad de que *a* sea de categoría superior a *b* es rechazada si:

$g_j(a) \geq g_j(b) + v_j(g_j(b))$,

inclusive si es que todos los criterios restantes están a favor de que *a* sea de categoría superior a *b*.

Un *índice de discordancia* $D_j(a,b)$, para cada criterio es definido como sigue:

$$D_j(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ si } g_j(b) \leq g_j(a)+p_j(g_j(a)) \\ 1 \text{ si } g_j(b) \geq g_j(a)+v_j(g_j(a)) \\ \text{lineal entre los dos} \end{cases}$$

Finalmente, el *grado de super-categorización* está definido por:

$$S(a,b)= \begin{cases} c(a,b) \text{ si } D_j(a,b) \leq c(a,b),\ \forall g_j \\ \\ c(a,b) * \Pi_{j\in J(a,b)} (1-D_j(a,b))/(1-c(a,b)) \end{cases}$$

donde $J(a,b)$ es el conjunto de criterios que cumplen $D_j(a,b) > c(a,b)$

El grado de super-categorización es entonces igual al índice de concordancia cuando ningún criterio es discordante. En el caso opuesto, el índice de concordancia es disminuido en función de la importancia de las discordancias.

Afortunadamente ☺ existe un programa que permite hacer todos estos cálculos automáticamente.

c. Fundamentos del Método Promethee (Brans and Vinke, 1985)

EL método Promethee ha sido diseñado para tratar con problemas de múltiples criterios, $G=\{g_1,...,g_j,...,g_k\}$ en los que existe un conjunto finito de alternativas $A=\{a_1,...a_i,...,a_n\}$ [Brans, 1997].

En este caso, el directivo encara una tabla o matriz de evaluación del siguiente tipo :

	g_1	g_2	…	g_j	…	g_k
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$	…	$g_j(a_1)$	…	$g_k(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	…	$g_j(a_2)$	…	$g_k(a_2)$
…	…	…	…	…	…	…
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$	…	$g_j(a_i)$	…	$g_k(a_i)$
…	…	…	…	…	…	…
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$	…	$g_j(a_n)$	…	$g_k(a_n)$

Este método requiere de cierta cantidad de información adicional sobre la relación de importancia entre los criterios. El directivo deberá suministrar la ponderación de importancia relativa de los criterios en relación al objetivo principal, como se ilustra en la siguiente tabla:

g_1	g_2	…	g_j	…	g_k
p_1	p_2	…	p_j	…	p_k

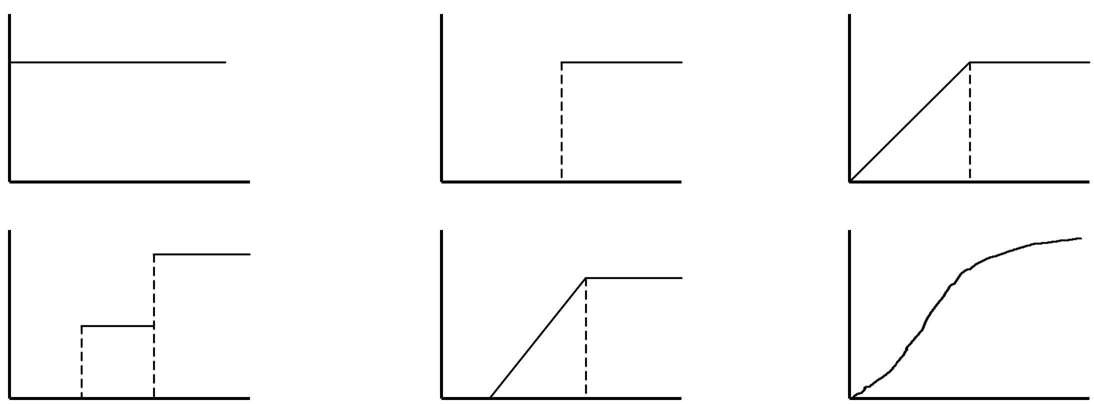
- El criterio más importante recibe la ponderación más alta.
- $\sum_{j=1..k} p_j = 1$

Además, el método asume que se harán comparaciones biunívocas entre las alternativas respecto a cada criterio. La manera de hacer dichas comparaciones es mediante el uso de una función de las siguientes características:

$F_j(a,b)=F_j[d_j(a,b)],\ \ a,b\in A$

donde, j es el índice característico de cada criterio g_j
$d_j(a,b)=g_j(a)-g_j(b)$
$0 \leq F_j(a,b) \leq 1$

Esta función, denominada *función de preferencias*, ha sido concebida para representar el tipo de relación entre dos alternativas respecto a un criterio determinado. Por lo tanto, el directivo deberá elegir para cada criterio una de las 6 diferentes formas de la función, a saber: la forma usual (horizontal recta), forma de U, forma de V, forma de escalera, forma de V considerando el parámetro de indiferencia y por último la forma Gaussiana (o en S). Respectivamente, de izquierda a derecha y de arriba abajo:



En cuanto la tabla de evaluación ($g_j(a_i)$), las ponderaciones (p_j) y las funciones de preferencias han sido definidas, el proceso Promethee puede comenzar.

Con el propósito de realizar las comparaciones biunívocas, deben ser definidos con antelación ciertos índices de preferencia y flujos de super-categorización, como se ilustra a continuación:

El *índice de preferencia agregada*, denotado por $\pi(a,b)$, expresa cómo y en que grado *a* es preferido a *b* con relación a todos los criterios en general. Es decir, expresa la preferencia global de una alternativa *a* con respecto a otra alternativa *b*.

$$\pi(a,b)=\sum_{j=1..k} F_j(a,b)\, p_j$$, siendo $\pi(a,b)$ un valor entre cero y uno, y $\pi(a,a)=0$

Un $\pi(a,b)$ cercano a cero implica una preferencia global débil de *a* sobre *b*. Así mismo, un $\pi(a,b)$ cercano a uno implica una preferencia global fuerte de *a* sobre *b*.

Una vez que todos los índices de preferencia agregada han sido obtenidos, se procede a calcular los flujos de super-categorización, como sigue:
El *flujo de super-categorización positivo* expresa cómo una alternativa *a* super-categoriza a las otras. Este índice es concebido por el autor como el "*poder*" de *a* o su "*carácter de super-categorización*".

$\varphi^+(a)=(1/(n-1)) \sum_{x\in A}\pi(a,x)$,
siendo mejor la alternativa *a* en la medida en que $\varphi^+(a)$ es mayor.

El *flujo de super-categorización negativo* expresa cómo una alternativa *a* es super-categorizada por las otras. Este índice es concebido por el autor como la "*debilidad*" de *a* o su "carácter de sub-categorización".

$\varphi^-(a)=(1/(n-1)) \sum_{x\in A}\pi(x,a)$,
siendo mejor la alternativa a en la medida en que $\varphi^-(a)$ es menor.

A continuación, se utilizan estos índices para calcular la categorización final de las alternativas:

En el caso de ranking parcial (cuando se permite la relación R)

$$\begin{cases} a\mathrm{P}b & \text{si } \begin{cases} \varphi^+(a) > \varphi^+(b) \text{ y } \varphi^-(a) < \varphi^-(b) \\ \varphi^+(a) = \varphi^+(b) \text{ y } \varphi^-(a) < \varphi^-(b) \\ \varphi^+(a) > \varphi^+(b) \text{ y } \varphi^-(a) = \varphi^-(b) \end{cases} \\ a\mathrm{I}b & \text{si } \varphi^+(a) = \varphi^+(b) \text{ y } \varphi^-(a) = \varphi^-(b) \\ a\mathrm{R}b & \text{si no se da ninguno de los casos anteriores} \end{cases}$$

En el caso de ranking completo (cuando se asume la comparabilidad de todas las alterativas), se define un índice denominado *flujo de super-categorización neto*:

$\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a)$. A mayor flujo neto, mejor la alternativa.

Por lo tanto, el ranking completo de las alternativas se define como:

$$\begin{cases} a\mathrm{P}b & \text{si } \varphi(a) > \varphi(b) \\ a\mathrm{I}b & \text{si } \varphi(a) = \varphi(b) \end{cases}$$

d. Fundamentos del Método MacBeth (Bana e Costa y Vansnick)

Basado en comparaciones semánticas sobre el atractivo y las diferencias en el grado de atractivo de diversos estímulos, el método MacBeth es un enfoque interactivo ideado para ayudar a la persona que emite los juicios, a cuantificar el atractivo que presenta cierto estímulo [Bana e Costa, 2000]. En términos generales, evaluar información de tipo ordinal sobre las preferencias de un directivo D respecto a un conjunto de alternativas no presenta mayor dificultad. Lamentablemente, en la mayoría de las aplicaciones prácticas esta información no es suficientemente completa para asegurar que los resultados sean significativos, pues a menudo es necesario saber, no solo que *x* es más atractivo que *y*, sino también cuanto más atractivo es. Muy poca gente posee información cardinal a priori (directamente de su mente al papel). Cuando un directivo D intenta presentar información de tipo cardinal sobre sus preferencias respecto a un conjunto de estímulos, hay cierto riesgo de que esa información no esté bien fundamentada. Los métodos de preferencias generalmente poseen técnicas que permiten al directivo D evaluar interactiva y progresivamente sus propias percepciones subjetivas respecto a los estímulos presentados. El método MacBeth sirve de guía en la construcción de una escala cardinal, la cual cuantifica el grado de atractivo de los elementos de un conjunto de estímulos S, según la opinión de un evaluador (el directivo D).

Para ilustrar este concepto comentaremos brevemente el siguiente ejemplo:

➨ En base a un estudio socio-económico, han sido definidos algunos objetivos (factores críticos de éxito) tendientes a promover el desarrollo socio-económico de una región. Para ello, a nivel gubernamental se ha creado un presupuesto que debe ser invertido en base a alguna política de desarrollo que logre la utilización óptima de los recursos disponibles. En una etapa subsiguiente se han propuesto diversas *políticas de desarrollo* (alternativas A=$\{a_{1,\ldots,}a_n\}$), las cuales deberán ser evaluadas en relación a su utilidad para cumplir con los objetivos establecidos. Dichos objetivos han sido convertidos en criterios, en base a los cuales se efectuará el proceso de evaluación.

Los criterios son:

- diversificación sectorial
- más PYMES
- mayor apertura hacia mercados externos
- más servicios
- mejor integración medioambiental
- mejor distribución territorial
- mejor viabilidad empresarial
- mayor capacidad de empleo.

Cada uno de los criterios debe ser estudiado para poder definir una escala que sirva para describir el nivel de impacto de cada política (i.e. alternativa) con respecto a ese criterio. Esta escala se usa para describir los *niveles de impacto* y por lo tanto se denomina *descriptor*. Tomando el caso del criterio "*diversificación sectorial*", cuyo éxito se mide en términos de "*el re-direccionamiento de la actividad económica hacia mercados prometedores*", se definen 6 niveles de impacto que son ordenados de la siguiente forma:

A la política de desarrollo ayudará a la CASI TODAS las comunidades
B la política de desarrollo ayudará a la MAYORÍA de las comunidades
C la política de desarrollo ayudará SOLO a las comunidades grandes
D la política de desarrollo EN GENERAL ayudará a las comunidades grandes
E la política de desarrollo EN PARTE ayudará a las comunidades grandes
F la política de desarrollo ayudará SOLO a las comunidades pequeñas

El conjunto de "niveles de impacto" constituye el conjunto de estímulos S={A,B,C,D,E,F}. Entre los elementos de S existe una relación de *estricto orden débil*, denominada P, que modela el grado de atractivo (ranking) de los elementos de S, según la opinión de un directivo D respecto a una propiedad determinada de los estímulos. El conjunto de elementos S={A,B,C,D,E,F} forma una escala ordinal, es decir: A es el más atractivo, seguido de B, C, D, E y finalmente F como el estímulo menos atractivo con respecto a uno de los criterios (en este ejemplo consideramos el criterio de "*diversificación sectorial*"). Esto se puede expresar en notación matemática de la siguiente forma:

$\forall\, x,y \in S$, xPy si y solo si D juzga a x como de mayor atractivo que y

De entre los niveles de impacto, dos de ellos deben ser elegidos para representar los niveles de referencia "*bueno*" y "*neutral*". En este caso, B=bueno y F=neutral. Más adelante, a cada política de desarrollo (alternativa) se le asignará un nivel de impacto referido a cada criterio, definiendo de esta manera un perfil de impactos de cada criterio y de cada política.

El fundamento básico de MacBeth es simplemente formular algunas preguntas concretas, con el objetivo de obtener información confiable sobre las *diferencias de atractivo* entre los diferentes estímulos, haciendo posible ensayar de ese modo la consistencia de las respuestas emitidas por el directivo en relación con el tipo de escala que se quiere construir. Dichas preguntas son lo más simples y naturales que sea posible y están referidas solamente a dos estímulos a la vez (comparaciones biunívocas). Lo que se persigue con el método es la obtención de una escala de preferencias a través del análisis de información indirecta obtenida de las respuestas a estas preguntas concretas y simples.

El procedimiento de formulación de las preguntas consiste en pedir a D que juzgue la *diferencia de atractivo* entre dos estímulos ($x,y \in S$, siendo x más atractivo que y), escogiendo una de las frases (o expresiones semánticas) siguientes:

C_0 SIN diferencia de atractivo
C_1 MUY DEBIL diferencia de atractivo
C_2 DEBIL diferencia de atractivo
C_3 MODERADA diferencia de atractivo
C_4 FUERTE diferencia de atractivo
C_5 MUY FUERTE diferencia de atractivo
C_6 EXTREMA diferencia de atractivo

Las preguntas utilizadas por lo general son parecidas a las que se presentan a continuación:

- Cual elemento (entre *x* y *y*) es el más atractivo respecto a la propiedad P?
- Como calificaría (usando $C_0,...,C_6$) la diferencia de atractivo entre *x* y *y*?

Con la información recabada durante este "*proceso de cuestionamiento*", se puede construir una matriz que tenga por elementos los juicios categóricos de D, acerca de las diferencias de atractivo entre pares de elementos de S, como se ejemplifica a continuación.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	sin	débil	moderada	moderada	muy fuerte	extrema
B		sin	débil	débil	muy fuerte	extrema
C			sin	muy débil	fuerte	muy fuerte
D				sin	fuerte	muy fuerte
E					sin	moderada
F						sin

A pesar de que cada pregunta involucra solo dos estímulos, tomando como base la matriz es sencillo inferir información indirecta concerniente a la diferencia de atractivo entre pares de estímulos. Por ejemplo, se puede decir que la diferencia de atractivo entre D y E (i.e. *fuerte*) es mayor que la diferencia de atractivo entre B y C (i.e. *débil*). Para el ejemplo de la tabla, el modelo se encargará de restringir que la diferencia entre el número asociado a D y el número asociado a E sea mayor que la diferencia entre los números asociados a B y C. En efecto, dadas la relación P y la matriz de juicios categóricos, el modelo presenta los elementos necesarios para verificar la existencia de una escala numérica φ en S que satisfaga las dos condiciones siguientes (reglas de medición):

<u>Condición 1</u> (condición ordinal):
$\forall\, x,y \in S: \varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow x$ es más atractivo que y

<u>Condición 2</u> (condición semántica)
$\forall\, k,k' \in \{1,2,3,4,5,6\}, \forall\, x,y,w,z \in S$ con $(x,y) \in C_k$ y $(w,z) \in C_{k'}$: $k \geq k'+1 \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(y) > \varphi(w)-\varphi(z)$

Si no es posible satisfacer estas dos condiciones, ninguna escala podrá representar los juicios expresados. Es decir, la matriz de juicios es incompatible con cualquier intento de representar dichos juicios en forma de una escala de intervalos. Si por el contrario las condiciones 1 y 2 son satisfechas (matriz consistente), el modelo determina a partir de todas las posibles escalas, una escala particular μ en S (denominada *escala básica de MacBeth*), mediante un procedimiento que consiste esencialmente en la resolución del siguiente problema de programación lineal:

Conjunto de estímulos: $S=\{s_1,s_2,...,s_n)$

Relación P en S, tal que:

s_1 es al menos tan atractivo como $s_2,...,s_{n-1}$, y más atractivo que s_n
s_2 es al menos tan atractivo como $s_3,...,s_n$
s_3 es al menos tan atractivo como $s_4,...,s_n$
...
s_{n-1} es al menos tan atractivo como s_n

Variables positivas: $\varphi(s_i)$, $i\in \{1,2,...,n\}$

Función objetivo: min $\varphi(s_1)$

Restricciones:

(1) $\varphi(s_n) = 0$
(2) $\forall\, x,y \in$ S, con $(x,y)\in C_0$: $\varphi(x)=\varphi(y)$
(3) $\forall$ k,k'$\in\{1,2,3,4,5,6\}$ con k>k', $\forall(x,y)\in C_k$ y $\forall(w,z)\in C_{k'}$:
$\varphi(x)-\varphi(y) \geq \varphi(w)-\varphi(z) + k - k'$

El resultado de este programa lineal es una escala numérica (μ en S), representando las posiciones de los estímulos respecto a su grado de atractivo (ej.: A=15, B=13, C=11, D=10, E=4, F=0).

El siguiente paso del modelo es transformar la escala μ, que es la primera escala que nos presenta el modelo MacBeth como representación de juicios ordinales, en una escala cardinal. Para esto, es necesario pensar en las proporciones respectivas entre las diferencias de atractivo de μ. Esto se logra confrontando a D con proporciones como $(\mu(x)- \mu(y))/(\mu(w)- \mu(z))$ y preguntarle si estas reflejan correctamente la proporción que D piensa que existe entre la diferencia de atractivo entre *x* y *y*, y la diferencia de atractivo entre *w* y *z*. Es decir, si $(\mu(A)- \mu(C))/(\mu(E)- \mu(F))=1$, habrá que preguntar si D considera que la diferencia de atractivo entre A y C es la misma que la diferencia de atractivo entre E y F. Entonces, D podrá variar los valores en μ, evitando violar las restricciones del programa lineal (lo cual puede ser calculado) hasta sentirse completamente satisfecho acerca de los atractivos relativos de cada par de estímulos.

Una vez que se han logrado las escalas cardinales para cada criterio, se procede a la evaluación del grado de atractivo global de las alternativas. Para esto, se construye una escala v_i para el descriptor S de cada criterio. Este descriptor será denominado X_i, siendo i el identificador de cada criterio. En párrafos superiores, dos niveles de impacto fueron definidos para representar los niveles de referencia “bueno” y “neutral”, que en el caso del ejemplo fueron B y F para el criterio “diversificación sectorial”. Formalmente, los niveles de referencia del criterio i serán denotados $v_i(\text{neutral}_i)=0$ y $v_i(\text{bueno}_i)=100$, siendo neutral_i y bueno_i los niveles de referencia del criterio i. De esta manera, $v_i(x_i)$ mide el atractivo “absoluto” (de acuerdo al criterio i) de cada elemento x_i de X_i. Para medir el atractivo “global” (de acuerdo a todos los criterios), el siguiente procedimiento de agregación es utilizado:

$V(x_1,...,x_n)=k_1v_1(x_1)+\ldots+ k_nv_n(x_n)$,
siendo n la cantidad total de criterios, $k_i\geq0$ y $\sum_{i=1...n}k_i=1$

Los parámetros k_i se conocen como *constantes ascendentes* y son determinadas de la siguiente manera:

El directivo D debe considerar una alternativa ficticia (e.g. una política de desarrollo) por cada criterio (e.g. diversificación sectorial), de tal manera que el impacto de esta alternativa ficticia sea "bueno" en relación con ese criterio y "neutral" para los demás criterios. Es decir, el directivo D imaginará n alternativas ficticias, tal que:

a_0=(neutral$_1$,...,neutral$_n$)
a_1=(bueno$_1$,neutral$_2$,…,neutral$_n$)
a_2=(neutral$_1$,bueno$_2$,…,neutral$_n$)
…
a_i=(neutral$_1$,…,bueno$_i$,…,neutral$_n$)
…
a_n=(neutral$_1$,neutral$_2$,…,bueno$_n$)

i.e., a_2 corresponde a la alternativa ficticia cuyo impacto sea "bueno" para el criterio 2

En seguida, se procede a realizar un proceso que permite ordenar las constantes ascendentes $\{k_1,...,k_n\}$. Aplicando el modelo de agregación se tiene que $V(a_0)=0$ y $V(a_i)=100k_i$, para i=1,...,n. Consecuentemente, ordenar las alternativas ficticias en orden decreciente en cuanto a su atractivo global relativo, llevará al ordenamiento de las constantes ascendentes en relación con su magnitud relativa. Este proceso consiste simplemente en escoger cual alternativa ficticia es la que sería más atractiva en relación al objetivo principal. Consiguientemente, la constante k_i correspondiente a esta alternativa ficticia es la de mayor valor. En otras palabras, la diferencia de atractivo entre esta alternativa ficticia y la alternativa a_0 es "extrema". Luego se procede a escoger la siguiente alternativa ficticia más importante y se da una expresión semántica descriptiva de la diferencia de atractivo entre esta segunda alternativa y la alternativa a_0, por ejemplo, "muy fuerte". Este proceso llevará a un ranking de las constantes ascendentes que a manera de ejemplo podría lucir más o menos así (escala ordinal):

$k_7>k_2>k_3=k_5>\ldots>k_n>k_i>\ldots>k_8>k_1>k_6$.

Esto hará posible la construcción de la siguiente tabla (note la correspondencia de sub-índices):

	a_7	…	a_n	a_i	…	a_6
a_7	no	…	fuerte	muy fuerte	…	muy fuerte
…	…	…	…	…	…	…
a_n			no	moderado	…	muy fuerte
a_i				no	…	fuerte
…					…	moderado
a_6						no

Esta tabla representa el resumen de las comparaciones biunívocas de las alternativas ficticias $\{a_0,...,a_i,...,a_n\}$. La alternativa a_0, es "neutral" para todos los criterios y cada alternativa ficticia a_i corresponde a cada uno de los criterios g_i.

Mediante el mismo modelo de programación lineal utilizado para definir la escala μ, se logra determinar una escala similar, la cual mediante una transformación lineal tendrá la propiedad de que la suma de sus valores (correspondientes a cada alternativa ficticia) sea 100, lo cual asegura que $k_1+k_2+...+k_n=1$, siendo n la cantidad total de criterios.

Posteriormente, los valores de esta escala pueden ser modificados con el fin de que las proporciones de los valores reflejen la percepción de D en cuanto a las diferencias de atractivo de las alternativas ficticias. Este procedimiento es similar a aquel que se comentó en párrafos precedentes referente a la escala de MacBeth.

Cuando estas modificaciones han sido hechas, los valores numéricos de las constantes ascendentes pueden ser calculados de la siguiente expresión:

Para cada par de alternativas ficticias:

$$(V(a_i)-V(a_0))/(V(a_j)-V(a_0))=V(a_i)/V(a_0)=(100k_i)/(100k_j)=k_i/k_j$$

Con estos datos es posible calcular el atractivo global de cada alternativa pues se cuenta con todos los parámetros necesarios para efectuar el procedimiento de agregación. El resultado de este procedimiento de agregación será una escala de preferencias que represente el ranking de atractivo global de las alternativas (i.e., considerando todos los criterios).

e. Fundamentos del Método NAIADE (Munda, 1995)

Este texto ha sido elaborado en base a "NAIADE MANUAL – Versión 1.0.ENG".

NAIADE es un método de toma de decisiones con criterios múltiples que permite tomar en cuenta diferentes tipos y grados de incertidumbre presentes en el proceso. Este método realiza un ranking de alternativas utilizando la técnica de las comparaciones biunívocas y no requiere de la elaboración previa de una ponderación de criterios respecto a su importancia relativa. Los valores utilizados para expresar el desempeño de las alternativas con respecto a los criterios pueden ser números exactos, números estocásticos, números difusos o expresiones lingüísticas. NAIADE permite la evaluación de las alternativas respecto a un conjunto de criterios mediante el uso de una *matriz de impactos*. Esto está basado en un algoritmo de comparación que utiliza esta matriz de impactos y que está compuesto por los siguientes pasos:

1. Construcción de la matriz de impactos (criterios Vs. alternativas).
2. Comparaciones biunívocas de las alternativas utilizando relaciones de preferencia.
3. Agregación de todos los criterios.
4. Ranking de alternativas.

NAIADE también permite la evaluación de conflictos entre diversos grupos de involucrados mediante una *matriz de equidad*, la cual consiste en evaluaciones lingüísticas de cada alternativa hechas por cada grupo de involucrados. A partir de la matriz de equidad se calcula otra matriz denominada *matriz de similaridad*, con la cual es posible descubrir la posible formación de coaliciones y los niveles de conflicto entre los diferentes grupos de involucrados.

Para construir la matriz de impactos es necesario contar con valores asociados a cada criterio respecto a cada alternativa. Estos valores pueden ser números puros (e.g.: el costo expresado en moneda), o definiciones cuantitativas afectadas por diferentes niveles de incertidumbre, ya sea escogiendo una *función de densidad probabilística* en el caso en que la incertidumbre pueda ser del tipo estocástico, o escogiendo la forma de la *función de membresía* en el caso de que la incertidumbre deba ser tratada con conceptos de la matemática difusa. Ver: Klir and Yuan / Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / 1995.

Para poder comparar los valores dados a los criterios respecto a las alternativas es necesario introducir el concepto de *distancia semántica* [Munda, 2001]. Distancia semántica se define simplemente como la distancia entre dos funciones, tomando en cuenta la posición y la forma de dichas funciones. Formalmente, distancia semántica es:

Dados dos conjuntos difusos $\mu_{A1}(x)$ y $\mu_{A2}(x)$, definimos:

$$f(x)=k_1\mu_{A1}(x) \text{ y } g(y)=k_2\mu_{A2}(y)$$

donde $f(x)$ y $g(y)$ son dos funciones obtenidas reescalando las ordenadas de $\mu_{A1}(x)$ y $\mu_{A2}(x)$ mediante el uso de las constantes k_1 y k_2, de manera tal que:

$$\int_{-\infty,+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty,+\infty} g(y)dy=1$$

La distancia semántica $S_d(f(x),g(x))$ entre las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define así:

Si $f(x)$: $X=[x_L,x_U]$ y $g(y)$: $Y=[x_{L'},x_{U'}]$, donde los conjuntos X y Y pueden ser conjuntos abiertos, entonces $S_d(f(x),g(x))=\int_X\int_Y|x-y|f(x)g(y)dxdy$

La comparación de los valores de cada par de alternativas con respecto a los criterios es realizada mediante el concepto de *distancia semántica*. La comparación se basa en *relaciones de preferencia* definidas mediante 6 funciones que permiten expresar un *índice de credibilidad* de las frases descriptivas de las relaciones de preferencia entre dos alternativas. Estas frases son: *mucho mejor*, *mejor*, *aproximadamente igual*, *igual*, *peor* y *mucho peor*. El índice de credibilidad está comprendido entre 0 y 1 e incrementa monotónicamente dentro de este rango. A continuación, las definiciones matemáticas de las seis relaciones de preferencia:

Mucho mejor: $\mu_{>>}(d)=\begin{cases} 0, \text{ para } d<0 \\ 1/(1+((C^2_{>>}(\sqrt{2}-1))/d^2)^2), \text{ para } d\geq 0 \end{cases}$

Mejor: $\mu_{>>}(d)=\begin{cases} 0, \text{ para } d<0 \\ 1/(1+(C^2_{>}/d^2)), \text{ para } d\geq 0 \end{cases}$

Aproximadamente igual: $\mu_{\cong}(d) = e^{-((\log 2/C_{\cong})|d|)}, \forall d$

Igual: $\mu_{=}(d) = e^{-((\log 2/(C_{=} * C_{=})(d*d))}, \forall d$

Mucho peor: $\mu_{<<}(d)=\begin{cases} 0, \text{ para } d<0 \\ 1/(1+((C^2_{<<}(\sqrt{2}-1))/d^2)^2), \text{ para } d\geq 0 \end{cases}$

Peor: $\mu_{<}(d)=\begin{cases} 0, \text{ para } d<0 \\ 1/(1+(C^2_{<}/d^2)), \text{ para } d\geq 0 \end{cases}$

, donde $C_{>>}$, $C_{>}$, $C_{=}$,$C_{\cong}$, $C_{<<}$ y $C_{<}$ son los valores en abscisa en los que las funciones igualan 0.5, y d es la distancia.

Las relaciones de preferencia tienen las siguientes restricciones:

1. $\mu_{>>}(d)= \mu_{<<}(-d)$ y $\mu_{>}(d)= \mu_{<}(-d)$, i.e.: dadas dos alternativas A y B a una distancia d, el índice de credibilidad de la frase "A *es mejor que* B" es igual al índice de credibilidad de la frase "A *es peor que* B".

2. $C_{=}<C_{\cong}<C_{>}<C_{>>}$. El índice de credibilidad de la frase "A *es igual que* B" es menor que el índice de credibilidad de la frase "A *es aproximadamente igual a* B". El índice de credibilidad de la frase "A *es mucho mejor que* B" es menor que el índice de credibilidad de la frase "A *es mejor que* B".

Independientemente del tipo de información (numérica, estocástica o difusa), es necesario asignar el valor numérico de la distancia donde el índice de credibilidad es 0.5.

A través de un algoritmo de agregación de los índices de credibilidad, NAIADE calcula un *índice de intensidad de preferencia* de una alternativa respecto a otra alternativa. En particular, el parámetro α es usado para expresar el requerimiento mínimo de los índices de credibilidad. Solamente aquellos criterios cuyos índices sean superiores al umbral α serán tomados en cuenta positivamente en el procedimiento de agregación.

El índice de intensidad de preferencia $\mu^*(a,b)$ (donde * significa >>, >, ≅, =, <<, <) de una alternativa *a* versus otra alternativa *b*, se define como sigue:

$$\mu^*(a,b)=(\Sigma_{m=1,..,M}\max(\mu^*(a,b)_m-\alpha\ ,\ 0)/(\Sigma_{m=1,..,M}|\mu^*(a,b)_m-\alpha|)$$

El índice de intensidad $\mu^*(a,b)$ tiene las siguientes características:

$0\leq\mu^*(a,b)\leq 1$
$\mu^*(a,b)=0$ si ningún $\mu^*(a,b)_m$ es mayor que α
$\mu^*(a,b)=1$ si $\mu^*(a,b)_m\geq\alpha\ \forall m$ y $\mu^*(a,b)_m>\alpha$ para al menos un criterio

Con el objetivo de utilizar la información respecto a la diversidad en la evaluación de las relaciones difusas, respecto a cada criterio, el concepto de *entropía* resulta muy útil. La entropía se calcula como un índice que varía entre 0 y 1 y que indica la variación de los índices de credibilidad que están sobre el umbral y cercanos al valor 0.5 (el cual corresponde a la máxima difusividad). Un valor entrópico de 0 significa que todos los criterios dan una indicación precisa, ya sea definitivamente creíble o definitivamente no-creíble, mientras que un valor entrópico de 1 significa que todos los criterios dan una indicación de máxima difusividad (0.5).

La información provista por el índice de intensidad de preferencia $\mu^*(a,b)$ y la correspondiente entropía $H^*(a,b)$ puede ser utilizada para construir los grados de veracidad (τ) de los siguientes enunciados:

"de acuerdo a la mayoría de los criterios,
a es mejor que *b*"
a y *b* son indiferentes"
a es peor que *b*"

Los enunciados "*a* es mejor que *b*", "*a* y *b* son indiferentes" y "*a* es peor que *b*" son calculados como sigue:

$$\omega_{mejor}(a,b)=(\mu_{>>}(a,b)\wedge C_{>>}(a,b)+\mu_{>}(a,b)\wedge C_{>}(a,b))/(C_{>>}(a,b)+C_{>}(a,b))$$
$$\omega_{indiferente}(a,b)=(\mu_{=}(a,b)\wedge C_{=}(a,b)+\mu_{\cong}(a,b)\wedge C_{\cong}(a,b))/(C_{=}(a,b)+C_{\cong}(a,b))$$
$$\omega_{peor}(a,b)=(\mu_{<<}(a,b)\wedge C_{<<}(a,b)+\mu_{<}(a,b)\wedge C_{<}(a,b))/(C_{<<}(a,b)+C_{<}(a,b))$$

, donde $C_*(a,b)=1-H^*(a,b)$ es el nivel de entropía asociado sobre el índice de intensidad de preferencia, y el operador ^ puede ser reemplazado por el operador "mínimo" (lo cual no da compensación) y por el operador Zimmermann-Zysno el cual permite utilizar grados de compensación variables.

Finalmente, el operador "*de acuerdo con la mayoría de los criterios*" es implementado filtrando los valores de ω_{mejor}, $\omega_{indiferente}$ y ω_{peor} de la siguiente manera:

$$\tau(\omega)=\begin{cases}1 & \forall\ \omega\geq 0.8\\ 3.33\omega-1.66 & \forall\ 0.5\leq\omega\leq 0.8\\ 0 & \forall\ \omega\leq 0.5\end{cases}$$

NAIADE permite el ranking de las alternativas en base a los índices de intensidad de preferencias $\mu^*(a,b)$ y sus correspondientes entropías $H^*(a,b)$. El ranking final proviene de la intersección de dos ranking diferentes. El primero, $\phi^+(a)$ está basado en las relaciones de preferencia "*mejor*" y "*mucho mejor*" y mediante un valor entre 0 y 1 indica cuan mejor es *a* respecto a las demás alternativas. El segundo, $\phi^-(a)$ está basado en las relaciones de preferencia "*peor*" y "*mucho peor*" y mediante un valor entre 0 y 1 indica cuan peor es *a* respecto a las demás alternativas. $\phi^+(a)$ y $\phi^-(a)$ se calculan como sigue:

$$\phi^+(a)=(\Sigma_{n=1..(N-1)}(\mu_{>>}(a,n)\wedge C_{>>}(a,n)+\mu_{>}(a,n)\wedge C_{>}(a,n))/(\Sigma_{n=1..(N-1)}C_{>>}(a,n)+\Sigma_{n=1..(N-1)}C_{>}(a,n))$$

$$\phi^-(a)=(\Sigma_{n=1..(N-1)}(\mu_{<<}(a,n)\wedge C_{<<}(a,n)+\mu_{<}(a,n)\wedge C_{<}(a,n))/(\Sigma_{n=1..(N-1)}C_{<<}(a,n)+\Sigma_{n=1..(N-1)}C_{<}(a,n))$$

, donde N es el número de alternativas y ^ es un operador que puede ser reemplazado por el operador "mínimo" (lo cual no da compensación) o por el operador Zimmermann-Zysno el cual permite utilizar grados de compensación variables.

Por último, para realizar el *análisis de equidad* se debe empezar por la creación de una *matriz de equidad* la cual da una indicación verbal (o lingüística) del juicio emitido por el grupo de interés para cada una de las alternativas. La *distancia semántica* es también utilizada en este caso para calcular los *índices de similaridad* entre los grupos de interés. A partir de la *matriz de equidad* se construye entonces una *matriz de similaridad*, la cual da un índice, para cada par de grupos de interés *i,j*, acerca de la similaridad de los juicios acerca de las alternativas propuestas. Este índice s_{ij} es calculado de la siguiente manera:

$$s_{ij}=1/(1+d_{ij})$$

, donde d_{ij} esla distancia de Minkovsky entre el grupo *i* y el grupo *j*, y es calculada a su vez como sigue:

$$d_{ij} = \sqrt[p]{\Sigma(S_k(i,j))^p}$$

, donde $S_k(i,j)$ es la distancia semántica entre el grupo *i* y el grupo *j* en el juicio de la alternativa *k*. N es el número de alternativas y $p>0$ es el parámetro de la distancia de Minkovsky.

A través de una secuencia de reducciones matemáticas, se forma el *dendógramo de formación de coaliciones*, el cual identifica la posible formación de coaliciones para los valores decrecientes de los índices de similaridad y el grado de conflicto entre los grupos de interés.

VIII. Conclusiones

✓Los métodos para la toma de decisiones con múltiples criterios son útiles para ayudar a resolver problemas complejos en los que es necesaria la comparación de alternativas considerando varios puntos de vista simultáneamente.
✓La naturaleza intangible de determinado tipo de criterios puede ser manipulada mediante el uso de expresiones semánticas extraídas del lenguaje cotidiano.
✓Existen modelos que permiten expresar matemáticamente los conceptos de "preferencia", "indiferencia" e "incomparabilidad".
✓Debido al grado de conflicto que presentan los tres sistemas involucrados en la temática de Desarrollo Sostenible y a la subjetividad de muchos de sus aspectos, los métodos para la toma de decisiones con múltiples criterios son potencialmente útiles para el análisis de decisiones en dicho campo.

IX. Bibliografía

☑ **Bana e Costa, C.**; Vansnick, J.C. / The MacBeth Approach: Basic Ideas, Software and an Application / Summer School on MCDA notes / 2000
☑ **Bouyssou, D.** / Building Criteria: A prerequisite for MCDA / Readings in Multiple Criteria Decision Aid / Springer-Verlag / 2000
☑ **Bouyssou, D.**; Marchant, T,; Pirlot, M.; Perny, P.; Tsoukias, A.; Vinke, Ph./ Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective / Kluwer's / 2000
☑ **Brans, J.P.**; Marechal B. / Multicriteria Decision Aid: The Promethee-Gaia Solution / 1997
☑ **Forman E.**/ Multi Criteria Decision Making and the Analytic Hierarchy Process / Readings in Multiple Criteria Decision Aid / Springer-Verlag / 1990
☑ **Hammond J.**; Keeney, R.; Raiffa, H. / The Hidden Traps in Decision Making / Harvard Bussiness Review / September – October 1998
☑ **Munda, G.**/ Multicriteria Evaluation in a Fuzzy Environment: Theory and Applications in Ecological Economics / Physica-Verlag /
☑ **Munda, G**./ NAIADE Manua and Tutorial – Version 1.0. ENG / 1995
☑ **Munda, G.**/ New approaches for the comparison of L-R fuzzy numbers: a theoretical and operational analysis / Fuzzy Sets and Systems 118 (2001) 407-418 / 2001
☑ **Paruccini, M.**/ Applying Multiple Criteria Aid for Decision to Environmental Management / Kluwer Academic Publishers / 1993
☑ **Roy, B.**/ Multicriteria Methodology for Decision Making / Kluwer Academic Publishers / 1996
☑ **Sánchez, R.**/ Analysis of Intangible Costs and Benefits with Fuzzy AHP / Catholic University Leuven / 1999.
☑ **Vincke, Ph.**/ Decision Aid / Wiley & Sons / 1992