

# Análisis Vectorial y Tensorial

Hans Cristian Muller Santa Cruz

2002



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>v</b>
<b>I. Repaso de Geometría</b>	<b>1</b>
I.1. Noción de Espacio . . . . .	1
I.2. Espacios Euclidianos . . . . .	16
<b>II. Curvas y Superficies</b>	<b>31</b>
II.1. Curvas . . . . .	31
II.2. Superficies . . . . .	53
II.2.1. Ejercicios . . . . .	58
II.3. Sistemas de Coordenadas . . . . .	59
<b>III. Campos de Vectores Diferenciables</b>	<b>67</b>
III.1. Campos vectoriales y escalares . . . . .	67
III.2. Diferenciación e integración sobre campos . . . . .	70
III.3. Gradiente, divergencia y rotacional . . . . .	71



# Índice de figuras

I.1.1. Visualización de propiedades de vectores . . . . .	3
I.1.2. Colinearidad . . . . .	4
I.1.3. Interrelación geometría, álgebra lineal y geometría analítica . . . . .	6
I.1.4. Recta y Plano del Espacio . . . . .	7
I.1.5. Postulado de las paralelas . . . . .	8
I.2.1. Bases ortogonales y ortonormales . . . . .	18
I.2.2. Elección del lado de un plano . . . . .	22
I.2.3. Angulos orientados y no orientados . . . . .	26
II.1.1. Representación de un camino. . . . .	31
II.1.2. Representación de curvas. . . . .	33
II.1.3. Aproximación por arcos poligonales. . . . .	33
II.1.4. Contacto entre curvas. . . . .	36
II.1.5. Recta tangente y espacio tangente. . . . .	38
II.1.6. Vectores tangentes. . . . .	43
II.1.7. Circunferencia oscultriz. . . . .	44
II.1.8. Triedro de Frenet. . . . .	46
II.2.1. Superficie Parametrizada. . . . .	53
II.2.2. Superficie de Revolución. . . . .	55
II.2.3. Superficies Orientables. . . . .	56
II.3.1. Lineas de Coordenadas. . . . .	61
III.1.1. Representación gráfica de una transformación del plano . . . . .	69
III.1.2. Representaciones gráficas de un campo escalar . . . . .	69



# Prefacio





# Capítulo I

## Repaso de Geometría

Tal como indica el título de este capítulo, se pretende reintroducir los conceptos de la geometría ya vistos en otras asignaturas, con la finalidad de tener el lenguaje y la simbología adecuada.

Inicialmente, se desarrollará el concepto de espacio, se verá la interrelación que existe entre la geometría (afín), el álgebra lineal y la geometría analítica, de manera que se pueda elegir los mejores métodos para abordar los problemas a ser resueltos.

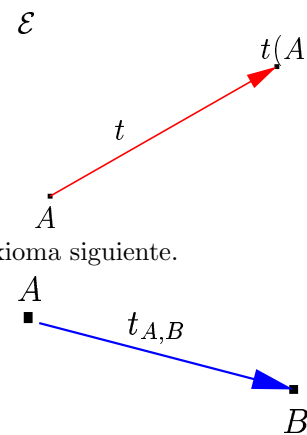
Como segundo punto, se introducirá la noción de ortogonalidad vía el producto escalar y se desarrollará el producto cruz o vectorial como un medio para construir vectores ortogonales. Asimismo se abordará los conceptos de longitud, ángulo, área y volumen.

### I.1. Noción de Espacio

A primera vista, todos tenemos una noción intuitiva de lo que es el espacio; sin entrar a discusiones metafísicas, podemos estar de acuerdo que el espacio es un conjunto, cuyos elementos los llamaremos puntos. Por otro, no percibiríamos el espacio, si es que no fuese posible desplazarse y particularmente realizar traslaciones.

Consiguientemente, para poder desarrollar la noción de espacio geométrico, se debe considerar, no solamente el espacio como un conjunto de puntos; sino también el conjunto de traslaciones del espacio. Denotemos por  $\mathcal{E}$  el espacio,  $\mathcal{T}$  el conjunto de las traslaciones del espacio. Es costumbre utilizar letras mayúsculas  $A, B, X, Z, \dots$  para identificar los puntos.

El siguiente paso es describir exactamente, lo que es una traslación. Comencemos diciendo que, una **traslación**  $t$  es una aplicación biyectiva de  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathcal{E}$  mismo. Visualizamos  $t$  con una flecha que une un punto  $A$  con su imagen  $t(A)$ , ver figura de la derecha. Asimismo es razonable, suponer que que la composición de traslaciones sigue siendo una traslación; es decir, si  $t$  y  $s \in \mathcal{T}$  entonces  $t \circ s \in \mathcal{T}$ .



Ahora bien, una de las características de las traslaciones, está dada por el axioma siguiente.

**Axioma I.1.1 (Axioma 1)** *Para cada par de puntos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{E}$ , existe una única traslación  $t$ , tal que  $t(A) = B$ . Dicha traslación la denotamos por  $t_{A,B}$*

Consecuencia de este axioma, es que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{T} \\ (X, Y) &\mapsto t_{X,Y} \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

está bien definida y además es sobreyectiva. En efecto, sea  $t \in \mathcal{T}$  una traslación y sea  $X$  un punto, suficiente tomar  $Y = t(X)$ .

Sin entrar a detalles matemáticos, podemos ya considerar lo que es un vector <sup>1</sup> y el conjunto de vectores  $V$ .

<sup>1</sup>En realidad un vector, es un clase de equivalencia de la relación de equivalencia definida por  $(X, Y) \sim (A, B) \iff t_{X,Y} = t_{A,B}$  y  $V$  el conjunto cociente de esta relación de equivalencia

**Definición I.1.1 (Vector)** (Para efectos del curso), vector es otra forma de llamar a una traslación.  $\overrightarrow{XY}$  es el vector de origen  $X$  y extremo  $Y$ , representa la traslación  $t_{X,Y}$ . Aparte de utilizar la notación  $\overrightarrow{XY}$  para denotar a un vector, se utiliza  $\vec{a}, \vec{x}, \dots$ .  $V$  es el conjunto de los vectores sobre  $\mathcal{E}$ . Asimismo, utilizamos la notación aditiva en  $V$ ; es decir  $\vec{a} + \vec{b}$  es lo mismo que  $t \circ s$  en  $\mathcal{T}$ .

**Remarca I.1.1** Para facilitar el desarrollo del curso,

1. Dado  $\vec{a}$  un vector, denotamos por  $t_{\vec{a}}$  la correspondiente traslación.
2.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY} \iff t_{A,B} = t_{X,Y} \iff t_{X,Y}(A) = B$ .
3. Si  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{x} \in A$ , convenimos  $A + \vec{x} = \vec{x} + A = t_{\vec{x}}(A)$ .

## Operaciones sobre $V$

Al definir lo que era un vector, hemos dicho que la adición es otra forma de referirse a la composición,

$$\vec{a} + \vec{b} \longleftrightarrow t_{\vec{a}} + t_{\vec{b}}. \quad (\text{I.1.2})$$

En consecuencia, la adición,  $+$ , es una operación interna de  $V$ . Comencemos a describir lo que sería una operación externa sobre  $V$ , la multiplicación por escalares.

Para  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ veces}}. \quad (\text{I.1.3})$$

El opuesto  $-\vec{a}$  de  $\vec{a}$ , se lo puede obtener de la siguiente manera, sea  $A$  un punto de  $\mathcal{E}$  y  $B = t_{\vec{a}}(A)$ , se tendrá  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ .

La multiplicación por un racional de la forma  $1/n$  al vector  $\vec{a}$  es equivalente a encontrar un vector  $\vec{b}$  tal que  $\vec{a} = n\vec{b}$ . Por consiguiente la multiplicación por escalar estaría completamente definida para los racionales<sup>2</sup>

**Axioma I.1.2** *Axioma 2.V con la adición y la multiplicación por escalar es un espacio vectorial real; es decir,*

- i)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ . (Asociatividad de la adición).
- ii) Existe un elemento  $\vec{0} \in V$ , tal que para todo  $\vec{a}$ , se tiene  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ , (Cero aditivo).
- iii) Para todo  $\vec{a} \in V$ , existe un elemento  $-\vec{a}$ , tal que  $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$ . (Opuesto aditivo).
- iv)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ . (Conmutatividad de la adición).
- v)  $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ . (Asociatividad de la multiplicación por escalar)
- vi) Para todo  $\vec{a} \in V$ , se tiene  $1\vec{a} = \vec{a}$ . (Invarianza del uno real).
- vii)  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ . (Distribución)
- viii)  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ . (Distribución).

Consecuencia de los axiomas 1 y 2, se las siguientes propiedades, útiles para nuestro propósito.

**Proposición I.1.1** *Se tiene:*

- i) (Relación de Chasles)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

<sup>2</sup>La prolongación a  $\mathbb{R}$  se la hace de manera axiomática.

- ii) (Regla del Paralelogramo) Sean  $A, B, A', B'$  cuatro puntos del espacio, entonces  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$   $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$  y  $\overrightarrow{BB'} \iff \overrightarrow{AA'}$ .
- iii)  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ .
- iv)  $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B$ .
- v) La aplicación  $\mathcal{E} \rightarrow V$  con  $O \in \mathcal{E}$  es una biyección. (El punto  $O$  se lo llama origen).  
 $X \mapsto \overrightarrow{OX}$

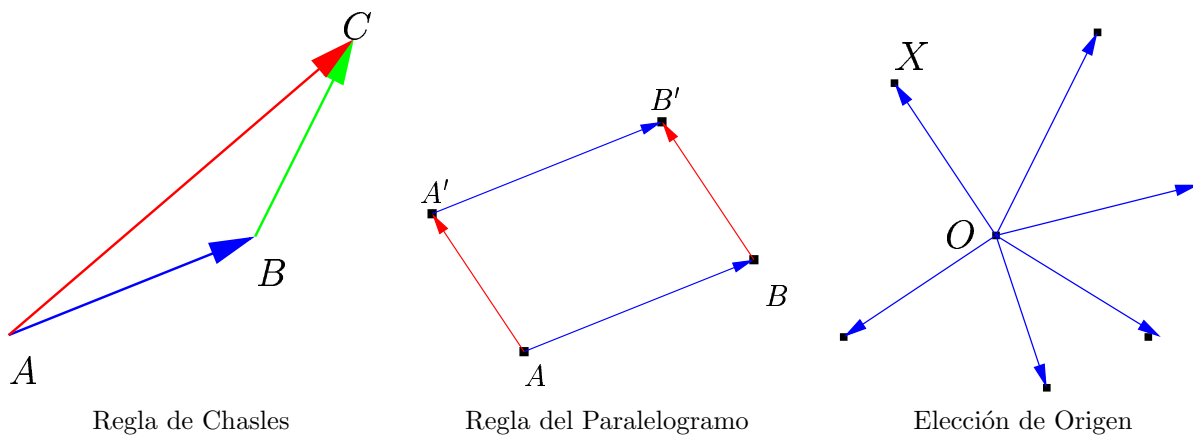


Figura I.1.1: Visualización de propiedades de vectores

**Demostración.-**

- i) Utilizamos el lenguaje de las traslaciones, se tiene  $t_{B,C} \circ t_{A,B}(A) = C$ , por el axioma 1, unicidad de las traslaciones y la conmutatividad, deducimos que  $t_{B,C} \circ t_{A,B} = t_{A,C}$ .
- iii) Ya visto.
- ii) Mostremos la primera implicación, por Chasles, la asociatividad, la conmutatividad y el punto iii) se tiene se tiene

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'A'}) + \overrightarrow{BB'} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'}) + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$$

iv)Ejercicio.

v)Ejercicio.

□

**Independencia Lineal**

**Definición I.1.2 (Independencia y Dependencia lineal)**

1. Se dice que  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  son linealmente independientes, si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n; \tag{I.1.4}$$

es decir, si la única solución es la trivial.

2. Se dirá que  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  son linealmente dependientes si satisfacen, una de las siguientes condiciones equivalentes:

a) Existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  no todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}. \quad (\text{I.1.5})$$

b) Existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lambda_j \neq 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$ .

c) Existen  $j \in \{1, \dots, n\}$  y  $\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n$  tal que  $\vec{a}_j = \sum_{i \neq j} \mu_i \vec{a}_i$ .

Si  $n = 2$  y  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  son linealmente dependientes, se dice que son colineales.

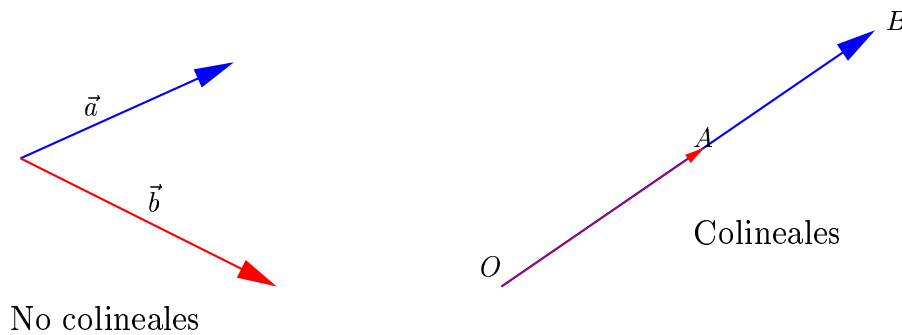


Figura I.1.2: Colinearidad

## Bases y Dimensión

**Definición I.1.3 (Sistema de Generadores)** Se dirá que  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$  es un sistema de generadores de  $V$  si todo  $\vec{a} \in V$  puede expresarse como combinación lineal de los vectores del sistema de generadores; es decir, existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tal que

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i. \quad (\text{I.1.6})$$

**Definición I.1.4 (Base)** Se dirá que  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$  es una base de  $V$ , si está familia es linealmente independiente y es un sistema de generadores. El número  $n$  de elementos de la base se llama dimensión y se denota  $\dim V$

**Remarca I.1.2** Sin necesidad de demostrar, en el curso de Algebra Lineal de segundo semestre teóricamente ya sido visto.

1. El número de elementos de una base es independiente de la elección de la base.

2. La dimensión de un espacio vectorial es el número maximal de elementos que puede tener una familia linealmente independiente. Por consiguiente, toda familia de vectores que tenga más elementos que la dimensión es linealmente dependiente.
3. La dimensión de un espacio vectorial es el número minimal de elementos que puede tener un sistema de generadores.
4. Sea  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  una base de un espacio vectorial  $V$  (de dimensión  $n$ ), entonces todo vector  $\vec{v}$  de  $V$  se escribe de manera única

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ único.} \quad (\text{I.1.7})$$

Los reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son las componentes de  $\vec{v}$  respecto a la base  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . Asimismo, la aplicación

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i &\longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned} \quad (\text{I.1.8})$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

5. Por el inciso precedente, todo espacio vectorial real de dimensión  $n$   $V$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . No existe base privilegiada en  $V$ , pero en  $\mathbb{R}^n$  la base canónica  $\vec{e}_1 = (1, \dots, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  es la base privilegiada.

**Axioma I.1.3 (Axioma 3.)** *El espacio vectorial  $V$  inducido por las traslaciones del espacio  $\mathcal{E}$  es de dimensión 3.*

**Remarca I.1.3** Para el plano  $\mathcal{P}$  el axioma 3, se lo modifica tomando como dimensión 2 y para espacios afines de dimensiones más grandes igualmente solamente se modifica el axioma 3.

## Referenciales y Coordenadas

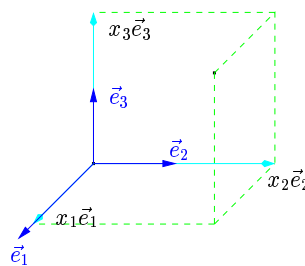
**Definición I.1.5 (Referencial.)** *Un referencial (cartesiano) es darse un origen  $O \in \mathcal{E}$  y una base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  de  $V$ .*

*Un referencial (afín) es darse 4 puntos  $E_0, E_1, E_2, E_3$  de  $\mathcal{E}$  tales que  $\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}$  sea una base de  $V$ .*

Si  $O \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  es un referencial de  $\mathcal{E}$  y  $X \in \mathcal{E}$ , se tiene

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad (\text{I.1.9})$$

$x_1, x_2, x_3$  son las coordenadas cartesianas de  $X$  respecto al referencial  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Se escribe  $X(x_1, x_2, x_3)$  o bien  $X = (x_1, x_2, x_3)$ .



También son de utilidad las llamadas coordenadas baricéntricas de un punto  $X \in \mathcal{E}$  respecto al referencial afín  $E_0, E_1, E_2, E_3$ , son los reales  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tales que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \text{ y } \alpha_0 \overrightarrow{XE_0} + \alpha_1 \overrightarrow{XE_1} + \alpha_2 \overrightarrow{XE_2} + \alpha_3 \overrightarrow{XE_3}. \quad (\text{I.1.10})$$

Dejamos al estudiante verificar que  $\alpha_0 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$ ,  $\alpha_1 = x_1$ ,  $\alpha_2 = x_2$  y  $\alpha_3 = x_3$  si  $X(x_1, x_2, x_3)$  respecto al referencial cartesiano  $E_0, \overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}$ .

El siguiente diagrama nos permite ilustrar la interrelación que existe entre la geometría (afín) del espacio, el álgebra lineal y la geometría analítica.

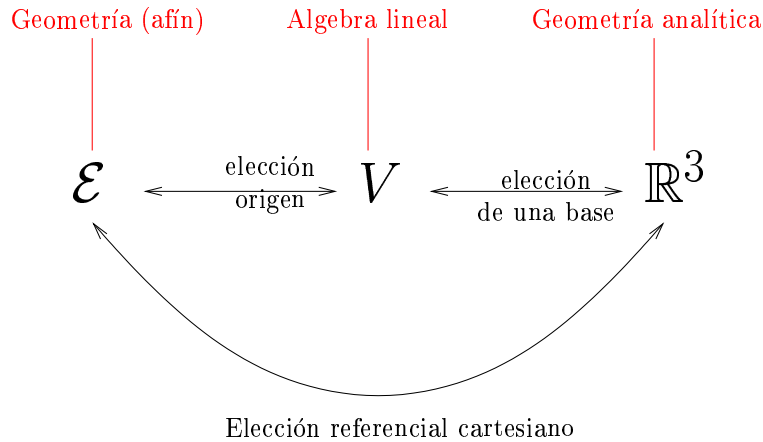


Figura I.1.3: Interrelación geometría, álgebra lineal y geometría analítica

## Rectas y Planos

Una vez que hemos conceptualizado la noción de espacio y determinado los vínculos con el álgebra lineal y la geometría analítica, el siguiente paso será el de estudiar rectas y planos.

Comenzemos estudiando los subespacios vectoriales de  $V$ .

**Definición I.1.6** Sea  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , la recta vectorial de dirección  $\vec{a}$  es el conjunto

$$D_{\vec{a}} = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \text{ colineal a } \vec{a}\} = \{\vec{x} \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{x} = \lambda \vec{a}\}$$

Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  linealmente independientes, el plano vectorial de dirección  $\vec{a}, \vec{b}$  es el conjunto

$$\begin{aligned} P_{\vec{a}, \vec{b}} &= \{\vec{x} \in V \mid \vec{x}, \vec{a}, \vec{b} \text{ son linealmente independientes}\} \\ &= \{\vec{x} \in V \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}\} \end{aligned}$$

**Remarca I.1.4** En el curso de Álgebra Lineal, se visto:

1. Todos los subespacios vectoriales de dimensión 1 son rectas vectoriales.
2. Todos los subespacios vectoriales de dimensión 2 son planos vectoriales.

**Proposición I.1.2** Para rectas y planos vectoriales, se tiene:

- i)  $D_{\vec{a}} = D_{\vec{a}'}$   $\iff$   $D_{\vec{a}} \subset D_{\vec{a}'}$   $\iff$   $\vec{a}$  y  $\vec{a}'$  son colineales.
- ii)  $P_{\vec{a}, \vec{b}} = P_{\vec{a}', \vec{b}'}$   $\iff$   $P_{\vec{a}, \vec{b}} \subset P_{\vec{a}', \vec{b}'}$   $\iff$   $\vec{a}', \vec{a}, \vec{b}$  y  $\vec{b}', \vec{a}, \vec{b}$  son familias linealmente dependiente  $\iff$   $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}'$  y  $\vec{b}, \vec{a}', \vec{b}'$  son familias linealmente dependientes.

**Demostración.-** Ejercicio

□

A continuación definiremos los objetos equivalentes del espacio afín a los subespacios vectoriales de  $V$ .

**Definición I.1.7** Sea  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{b} \in V$  no nulo, la recta que pasa por  $A$  y dirección  $\vec{b}$  es el subconjunto

$$\mathcal{D}_{A,\vec{b}} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AX} \in D_{\vec{b}}\} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{b}\} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{b}\}. \quad (\text{I.1.11})$$

Los conjuntos de la forma  $\mathcal{D}_{A,\vec{b}}$  son las rectas de  $\mathcal{E}$ .

Sea  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{b}, \vec{c} \in V$  no colineales, el plano que pasa por  $A$  y direcciones  $\vec{b}, \vec{c}$  es el subconjunto

$$\mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AX} \in P_{\vec{b},\vec{c}}\} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}\} = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}\}. \quad (\text{I.1.12})$$

Los conjuntos de la forma  $\mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}}$  son los planos de  $\mathcal{E}$ .

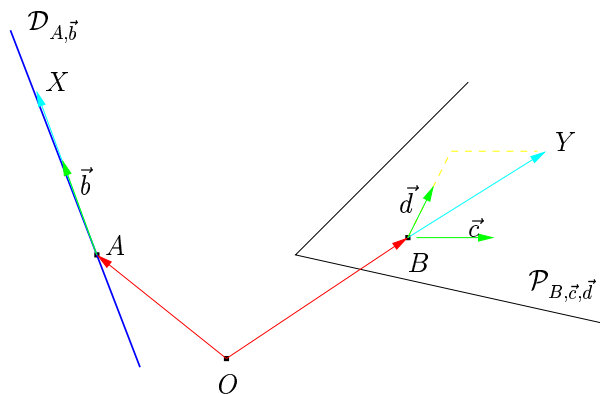


Figura I.1.4: Recta y Plano del Espacio

**Proposición I.1.3** Para rectas y planos del espacio  $\mathcal{E}$ , se tiene:

i)  $\mathcal{D}_{A,\vec{d}} = \mathcal{D}_{A',\vec{d}'} \iff \mathcal{D}_{A,\vec{d}} \subset \mathcal{D}_{A',\vec{d}'} \iff \overrightarrow{AA'}, \vec{d}, \vec{d}'$  son colineales.

ii)  $\mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}} = \mathcal{P}_{A',\vec{b}',\vec{c}'} \iff \mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}} \subset \mathcal{P}_{A',\vec{b}',\vec{c}'} \iff \overrightarrow{AA'}, \vec{b}, \vec{d} \in P_{\vec{b}',\vec{c}'}$ .

**Demostración.-** Ejercicio

□

La recta vectorial  $D$  asociado a una recta  $\mathcal{D}$ , se llama dirección, como también el plano vectorial  $P$  asociado a un plano  $\mathcal{D}$  se llama dirección del plano.

En la siguiente proposición, se dará sin demostración, algunos resultados de existencia de rectas y planos, ya desarrollados en cursos de nivel inferior.

**Proposición I.1.4** Se tiene:

i) Sean  $A, B \in \mathcal{E}$  dos puntos distintos, entonces existe una única recta  $\mathcal{D}$  conteniendo  $A$  y  $B$ .

ii) Sean  $A, B, C \in \mathcal{E}$  tres puntos no alineados, entonces existe un único plano  $\mathcal{P}$  tal que  $A, B, C \in \mathcal{P}$

## Paralelismo e Intersección

La noción de paralelismo de subespacios afines (rectas y planos), es una noción ligada a los subespacios vectoriales asociados.

**Definición I.1.8 (Paralelismo.-)** Sean  $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{P}, \mathcal{P}'$  rectas y planos en  $\mathcal{E}$  de direcciones  $D, D', P, P'$  respectivamente. Se dirá:

1.  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \iff D = D'$ .
2.  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \iff D \subset P$ .
3.  $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \iff P = P'$ .

Remarcando que no hay planos paralelos a rectas.

**Proposición I.1.5 (Postulado de las paralelas.-)** Sean  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$  una recta,  $\mathcal{P}$  un plano, entonces:

- i) existe una única recta  $\mathcal{D}'$  tal que  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$  y  $A \in \mathcal{D}'$ .
- ii) existe un único plano  $\mathcal{P}'$  tal que  $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$  y  $A \in \mathcal{P}'$ .

**Demostración.-** Ejercicio

□



Figura I.1.5: Postulado de las paralelas

La intersección de rectas y o planos es un problema que ya sido visto minuciosamente en los cursos de geometría de nivel inferior. Solamente hay que recordar que la intersección de rectas y o planos puede ser el conjunto vacío, un punto, una recta o finalmente un plano.

## Ecuaciones de Rectas y Planos

### Ecuación de una recta

Sea  $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  un referencial cartesiano de  $\mathcal{E}$ . Consideremos el punto  $A(a_1, a_2, a_3)$  y el vector  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ . Tomemos un punto  $X(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}_{A, \vec{b}}$ , de acuerdo a la definición de recta  $X$  satisface  $\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda\vec{b}$ , lo que se escribe en coordenadas como

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1t \\ x_2 = a_2 + b_2t \\ x_3 = a_3 + b_3t \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } \mathcal{D}_{A, \vec{b}}. \quad (\text{I.1.13})$$

La ecuación cartesiana de  $\mathcal{D}_{A,\vec{b}}$ , ecuación que solamente depende de las coordenadas y no de un parámetro, se obtiene de la ecuación paramétrica despejando  $t$ . Por ejemplo si  $b_1, b_2, b_3 \neq 0$ , se obtiene

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3}; \quad (\text{I.1.14})$$

si  $b_1 = 0$  y  $b_2, b_3 \neq 0$ , se obtiene

$$x_1 = a_1, \quad \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3}; \quad (\text{I.1.15})$$

si  $b_1 = b_2 = 0$ , se obtiene

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2. \quad (\text{I.1.16})$$

### Ecuación de un plano

Consideremos el plano  $\mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}}$ . Respecto a un referencial cartesiano  $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , se tiene  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  y  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ . Sea  $X \in \mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}}$ , se tiene  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ , por consiguiente, pasando a las coordenadas se obtiene

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } \mathcal{P}_{A,\vec{b},\vec{c}}. \quad (\text{I.1.17})$$

La ecuación cartesiana de este plano, se obtiene de resolver  $\lambda, \mu$  de dos de las ecuaciones y remplazar en la tercera ecuación. El trabajo puede ser bastante arduo, en la siguiente sección se verá una forma muy sencilla de determinar la ecuación cartesiana de un plano.

### Aplicaciones afines, aplicaciones lineales

Las aplicaciones lineales son las aplicaciones típicas de los espacios vectoriales, que dicho sea de paso, han sido estudiadas en el curso de álgebra lineal. Sin embargo recordemos

**Definición I.1.9 (Aplicación Lineal.-)** *Se dirá que una aplicación  $f : V \rightarrow W$ , donde  $V, W$  son espacios vectoriales, es lineal si*

$$f(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda f(\vec{a}) + \mu f(\vec{b}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V. \quad (\text{I.1.18})$$

Las aplicaciones lineales tienen como característica primordial las imágenes de subespacios vectoriales son subespacios vectoriales; es decir si  $f : V \rightarrow W$  es lineal,  $U \subset V$  es subespacio vectorial, entonces  $f(U) \subset W$  es subespacio vectorial. Pero lo más importante está dado por

**Proposición I.1.6 (Teorema Fundamental del Algebra Lineal)** *Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  una base de  $V$ , entonces toda aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$  está enteramente determinada por la imagen de la base; es decir por  $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$ .*

**Demostración.-** La demostración la haremos para  $V$  de dimensión 3. Sea  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  la base elegida. Todo vector  $\vec{v} \in V$  se expresa de manera única como

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3. \quad (\text{I.1.19})$$

Como  $f$  es lineal, se tiene

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \\ &= v_1f(\vec{e}_1) + v_2f(\vec{e}_2) + v_3f(\vec{e}_3). \end{aligned} \quad (\text{I.1.20})$$

Por consiguiente,  $f$  está enteramente determinada por la fórmula (I.1.20).

□

Una consecuencia de este teorema fundamental del álgebra lineal es la posibilidad de traducir el álgebra de las aplicaciones lineales en el álgebra matricial, como una forma de operativizar cálculos. En efecto, utilizando la notación de vector columna

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.21})$$

la fórmula (I.1.20), se convierte en

$$\vec{v} = (f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2) \quad f(\vec{e}_3)) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.22})$$

Ahora bien, supongamos para efectos didácticos que  $W$  es también de dimensión 3 y  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  una base de  $W$ , se tiene

$$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{d}_1 + a_{2j}\vec{d}_2 + a_{3j}\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{I.1.23})$$

Lo que nos hace plantear

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.24})$$

**Definición I.1.10** La matriz  $M_f$  se llama matriz de  $f$  respecto a las bases  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  de  $V$  y  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3$  de  $W$ .

Consecuencia de (I.1.22) y (I.1.23) se tiene

$$f(\vec{v}) = M_f \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.25})$$

### Traducción del lenguaje lineal al lenguaje matricial

**Proposición I.1.7** Sean  $f, f' : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow W$  y  $h = g \circ f : U \rightarrow W$ ,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  base de  $U$ ,  $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m$  base de  $V$  y  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_l$  base de  $W$ , entonces

- i)  $M_h = M_g \cdot M_f$ ,
- ii)  $M_{\lambda f} = \lambda M_f$ ,
- iii)  $M_{f+f'} = M_f + M_{f'}$ .

**Demostración.-** Referirse al curso de Álgebra Lineal

□

**Cambio de bases**

Consideremos el espacio vectorial  $V$  y sean  $\mathfrak{B} : \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  y  $\mathfrak{B}' : \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  dos bases de  $V$ , se tiene para  $\vec{v} \in V$ :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \vec{e}'_i = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}. \quad (\text{I.1.26})$$

Por otro lado, se tiene

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} \vec{e}'_i = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}. \quad (\text{I.1.27})$$

**Definición I.1.11** La matriz

$$P_{\mathfrak{B}', \mathfrak{B}} = P = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.28})$$

se llama matriz de cambio de base, de la base  $\mathfrak{B}$  a la base  $\mathfrak{B}'$ .

**Proposición I.1.8** Sean  $\mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B}'$  dos bases de un espacio vectorial  $V$ . Sea  $\vec{v} \in V$  un vector, entonces

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'} = P_{\mathfrak{B}', \mathfrak{B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.29})$$

**Demostración.-** Por definición de componentes, se tiene

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n v'_i \vec{e}'_i, \quad (\text{I.1.30})$$

donde los  $\vec{e}_i$  son los elementos de  $\mathfrak{B}$  y los  $\vec{e}'_i$  elementos de la otra base. Introducimos (I.1.27) en (I.1.30), lo que da

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_{i=1}^n v_i \left( \sum_{j=1}^n m_{ji} \vec{e}'_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_{ji} v_i \right)}_{v'_j} \vec{e}'_j. \end{aligned} \quad (\text{I.1.31})$$

□

**Remarca I.1.5** Se tiene:

1. La matriz asociada a una aplicación lineal depende de la elección de las bases por un lado y por el otro existen bases respecto a la cual, la matriz asociada tiene una forma más simple, por ejemplo diagonal.

2. Si  $\mathfrak{B}$  y  $\mathfrak{B}'$  dos bases de  $V$  espacio vectorial, la matriz de cambio de base, de la base  $\mathfrak{B}$  a la base  $\mathfrak{B}'$ ,  $P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$  puede interpretarse como la matriz asociada a la aplicación identidad ( $f(v) = v$ ) tomando  $\mathfrak{B}$  como base en la fuente y  $\mathfrak{B}'$  en el destino, el diagrama siguiente nos permite visualizar.

$$\begin{aligned} id : V_{\mathfrak{B}} &\longrightarrow V_{\mathfrak{B}'} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i &\mapsto \sum_{i=1}^n v'_i \vec{e}'_i = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.1.32})$$

3. Como  $P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$  es la matriz asociada a la identidad y la identidad es inversible, esta matriz es inversible y

$$(P_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}})^{-1} = P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}. \quad (\text{I.1.33})$$

**Teorema I.1.1 (Cambio de Base)** Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación lineal  $M_f$  la matriz de  $f$  respecto a  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente,  $M'_f$  la matriz de  $f$  respecto a  $\mathfrak{A}'$  y  $\mathfrak{B}'$  otras bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Entonces

$$M_f = P_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} M'_f P_{\mathfrak{A}',\mathfrak{A}}. \quad (\text{I.1.34})$$

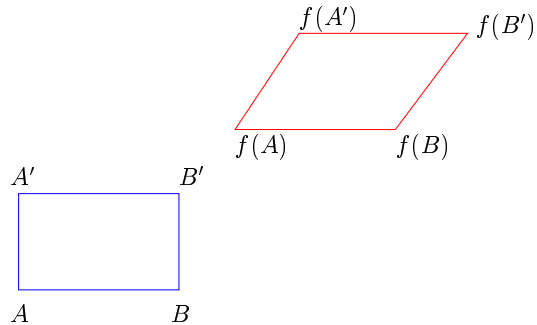
### Aplicaciones afines

Conocidas los atributos más importantes de las aplicaciones lineales, como aplicaciones características de los espacios propios, ya podemos estudiar las aplicaciones equivalentes del espacio  $\mathcal{E}$ .

Consideremos una aplicación  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Esta aplicación puede inducir una aplicación vectorial asociada  $\vec{f} : V \rightarrow V$  de la siguiente manera

$$\vec{f} : V \longrightarrow V \\ \overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(B)}. \quad (\text{I.1.35})$$

Remarcamos, que no siempre es posible inducir  $\vec{f}$ , ya que (I.1.35) puede no tener sentido, por ejemplo cuando existen  $A, B, A', B' \in \mathcal{E}$  con  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$  y  $\overrightarrow{f(A)f(B)} \neq \overrightarrow{f(A')f(B')}$



**Ejemplo I.1.1** Sea  $t \in \mathcal{T}$  una traslación, sean  $A, B \in \mathcal{E}$ , utilizando la identidad del paralelogramo, se tiene

$$\overrightarrow{t(A), t(B)} = \overrightarrow{AB},$$

de donde  $\vec{t} = id$ .

**Definición I.1.12** Se dice que  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  es afín si  $\vec{f} : V \rightarrow V$  está bien definida y es lineal

**Proposición I.1.9** Sea  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , entonces la imagen de un subespacio afín (punto, recta, plano, espacio) es un subespacio afín.

Cuando una aplicación afín  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  es biyectiva, se la llama transformación afín.

**Proposición I.1.10** Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  es biyectiva y conserva rectas, entonces  $f$  es una transformación afín.

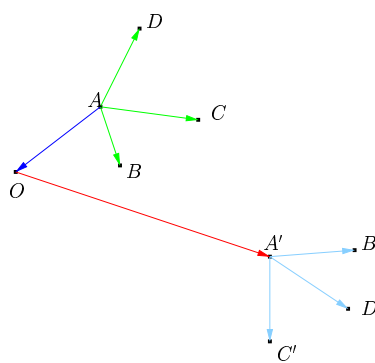
**Teorema I.1.2** Sean  $A, B, C, D \in \mathcal{E}$  cuatro puntos no coplanares y  $A', B', C', D'$  otros cuatro puntos de  $\mathcal{E}$ , entonces existe una única transformación afín  $f$  tal que  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$  y  $f(D) = D'$ . El mismo enunciado es válido para el plano afín, en lugar de tomar 4 puntos, tomamos 3 puntos no alineados.

**Demostración.-** Consideramos un referencial  $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  y remarkamos que si  $\vec{g} : V \rightarrow V$  es lineal, entonces la aplicación  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $g(X) = O + (\overrightarrow{OX})$  es afín. Asimismo una verificación simple mostrará que la composición de aplicaciones afines es afín.

La construcción de la aplicación afín que envía los cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$  sobre  $A', B', C'$  y  $D'$  pasa por la composición de las siguientes aplicaciones afines:

1. La traslación  $t_{A,O}$ .
2. La aplicación  $\vec{g} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $g(X) = O + \vec{g}(\overrightarrow{OX})$  donde  $\vec{g}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ ,  $\vec{g}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$  y  $\vec{g}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'D'}$ .
3. La traslación  $t_{O,A'}$ .

Planteando  $f = t_{O,A'} \circ g \circ t_{A,O}$ , la aplicación  $f$  cumple con los requisitos. La unicidad la aceptamos.



□

### Representación matricial de una transformación afín

Consideremos la transformación afín  $f$  del teorema precedente. Respecto a un referencial  $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , se tiene  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$  y así sucesivamente. Si  $X(x_1, x_2, x_3)$  utilizando la notación de columna y tomando la composición de las aplicaciones de la demostración del teorema, se obtiene

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}}_{M_g} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.36})$$

donde  $M_g$  es la matriz de  $\vec{g}$  respecto a la base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  y  $\vec{g}$  es la aplicación lineal que envía  $\overrightarrow{AB}$  a  $\overrightarrow{A'B'}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  a  $\overrightarrow{A'C'}$  y  $\overrightarrow{AD}$  a  $\overrightarrow{A'D'}$

### Ejemplos y Aplicaciones

La interrelación existente entre la Geometría Afín, el Algebra Lineal y la Geometría Analítica proporciona una gama de métodos que permiten comprender y resolver muchos problemas geométricos de forma muy sencilla.

**Ejemplo I.1.2** Mostrar que las medianas de un triángulo se intersectan en un punto en común y que se cortan en una proporción de 2 : 1.

Sean  $A, B, C$  los vértices del triángulo, denotemos por  $D, E, F$  los puntos medios de los lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ . Sea  $G$  la intersección de la mediana  $\overline{AD}$  con la mediana  $\overline{BE}$ , ver figura de la izquierda.

Aplicando Chasles, se tiene

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \quad (\text{I.1.37})$$

Por otro lado,  $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$  y  $\overrightarrow{BG} = \mu \overrightarrow{BE}$  y

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}; \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \quad (\text{I.1.38})$$

reemplazando en (I.1.37), obtenemos  $\lambda(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + \mu(\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ .

utilizando el hecho que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  y reemplazando en la última ecuación, obtenemos

$$(\lambda + \frac{1}{2} \mu - 1) \overrightarrow{AB} + (\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu) \overrightarrow{BC} \quad (\text{I.1.39})$$

y como  $A, B, C$  no están alineados, se tiene que  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$  son linealmente independientes, de donde

$$\begin{cases} (\lambda + \frac{1}{2} \mu - 1) = 0 \\ (\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{2}{3}. \quad (\text{I.1.40})$$

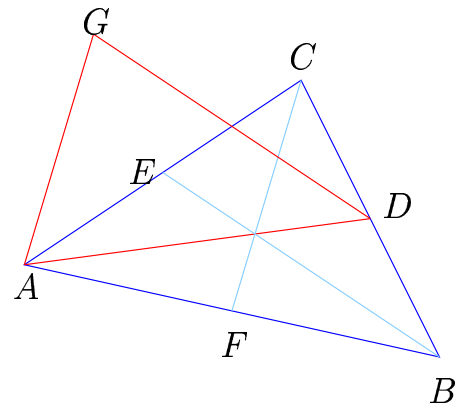
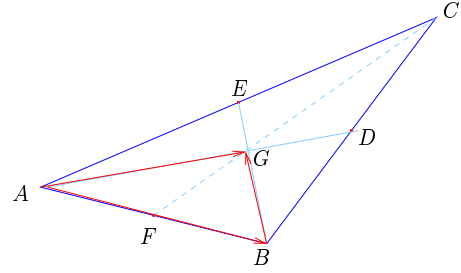
Por consiguiente, las dos medianas se cortan en una proporción de 2 : 1, con la tercera mediana sucederá lo mismo, suficiente intercambiar letras en los vértices. Por lo tanto las medianas son concurrentes y punto de intersección se llama baricentro.

**Ejemplo I.1.3** Dado un triángulo cualquiera y consideremos sus medianas, mostrar que existe un triángulo cuyos lados son paralelos e iguales a las mencionadas medianas

Sean  $A, B, C$  los vértices del triángulo, denotemos por  $D, E, F$  los puntos medios de los lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ . Por consiguiente las medianas están dadas por  $\overline{AD}, \overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ . Construyamos el triángulo demandado, tomemos como primer lado, el segmento  $\overline{AD}$  y planteemos  $G = D + \overrightarrow{BE}$ , por consiguiente el lado  $\overline{DG}$  es igual y paralelo a la mediana  $\overline{BE}$ .

Solo falta mostrar que el lado  $\overline{AG}$  es paralelo e igual a la mediana  $\overline{CF}$ , suficiente mostrar que  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FC}$ . En efecto

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}) + (\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FB} \end{aligned}$$



**Ejemplo I.1.4** Explicitar la aplicación afín del plano, que envía el punto  $A(1, 1)$  al punto  $A'(-1, -1)$ ,  $B(2, 1)$  al punto  $B'(-1, -2)$  y el punto  $C(1, 2)$  al punto  $C'(0, 0)$

Trasladando el punto  $A$  al origen, la aplicación vectorial asociada está dada por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'B''}\end{aligned}$$

cuya matriz respecto a la base  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  y  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tal como se ha visto en la demostración del teorema (I.1.2), la transformación afín del ejemplo se la obtiene componiendo una traslación  $\overrightarrow{AO}$ , la transformación lineal asociada y la traslación  $\overrightarrow{OA'}$ , lo que en coordenadas da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.41})$$

## Ejercicios

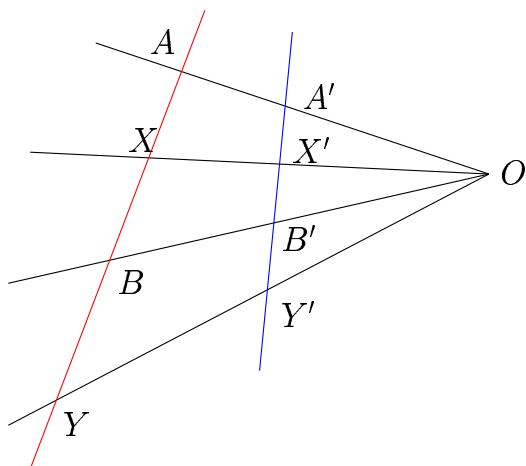
1. Sea  $A, B$  dos puntos distintos de  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{D}$  la recta que definen. Para  $X \in \mathcal{D}$ , se denota por  $m_A(X)$ ,  $m_B(X)$  los números reales tales que  $\overrightarrow{AX} = m_B(X)\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{XB} = m_A(X)\overrightarrow{AB}$ .

Mostrar que:

$$\begin{aligned}m_A(X) + m_B(X) &= 1, \\ \vec{0} &= m_A(X)\overrightarrow{XA} + m_B(X)\overrightarrow{XB}, \\ \overrightarrow{OX} &= m_A(X)\overrightarrow{OA} + m_B(X)\overrightarrow{OB}, \quad \forall O \in \mathcal{E}\end{aligned}$$

¿Qué significa geoméricamente  $m_A(X) < 0$ ,  $m_A(X) \in [0, 1]$  y  $m_A(X) > 1$ ?

2. (Birrazón) Con la notación del ejercicio precedente, mostrar que:



$$\frac{m_A(X)}{m_B(X)} : \frac{m_A(Y)}{m_B(Y)} = \frac{m_{A'}(X')}{m_{B'}(X')} : \frac{m_{A'}(Y)}{m_{B'}(Y)}.$$

3. Dar las ecuaciones paramétrica y cartesiana de la recta que pasa por  $(1, 2, 5)$  y  $(-2, 3, 4)$ .
4. Dar la ecuación cartesiana general de un plano que pasa por los puntos  $(1, 0, -1)$  y  $(2, 1, 5)$ .
5. Sea  $\mathcal{D}$  la recta que pasa por  $(1, 2, 1)$  y  $(-1, 0, 2)$ . Escribir las ecuaciones paramétrica y cartesiana de  $\mathcal{D}$  y las coordenadas de  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_n$ , donde  $\mathcal{P}_n$  es el plano de ecuación

$$3x_1 + x_2 - x_3 = n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Encontrar la intersección del plano  $\mathcal{P}$  que pasa por  $(3, 1, 4)$ ,  $(0, 1, 1)$  y  $(-1, 0, 1)$  y del plano  $\mathcal{Q}$  que pasa por  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .
7. Sean  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$ ,  $\mathcal{P}'$ , rectas y un plano de direcciones  $D$ ,  $D'$  y  $P'$ . Mostrar que
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset \Rightarrow \forall X \in \mathcal{D}, \forall X' \in \mathcal{D}', \overrightarrow{XX'} \in D + D'$
  - $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \Rightarrow \forall X \in \mathcal{D}, \forall Y \in \mathcal{P}, \overrightarrow{XX'} \in D + P$
8. Si  $t$  es una traslación y  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  es afín biyectiva, mostrar que  $f^{-1} \circ t \circ f$  es una traslación
9. Se considera  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  afín biyectiva tal que  $f(\mathcal{D}) \parallel \mathcal{D}, \forall \mathcal{D}$  recta de  $\mathcal{E}$ . Verificar que si  $f$  tiene 2, 1 o 0 puntos fijos, entonces  $f$  es respectivamente la identidad, una homotecia o una traslación. Una homotecia  $H_{O,\lambda}$  de centro  $O$  y razón  $\lambda \neq 0$  es una transformación afín tal que  $\overrightarrow{OH_{O,\lambda}(X)} = \lambda \overrightarrow{OX}$  para todo  $X \in \mathcal{E}$ .
10. Sean  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  una base de  $V^2$  espacio de dimensión 2 y  $D = D_{\vec{e}_1}$ . La simetría de eje  $D$  y de dirección  $\vec{e}_2$  es la aplicación lineal de matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  respecto a la base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Mostrar que si  $f : V^2 \rightarrow V^2$  es lineal y satisface  $f \circ f = id_{V^2}$ , entonces  $f = \pm id_{V^2}$  o  $f$  es una simetría.
11. En  $\mathbb{R}^3$ , se considera las bases  $\vec{e}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{e}_2 = (2, -2, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (1, 1, \pi)$  y  $\vec{e}'_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{e}'_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{e}'_3 = (-1, 0, 0)$ . Dar las componentes de  $\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$  en la base  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ .
12. a) Mostrar que los vectores  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 0)$  y  $(0, 1, -1)$  constituyen una base de  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal definida por:

$$\begin{aligned} f((1, 1, 1)) &= (1, 1, 1) \\ f((1, -1, 0)) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -2) \\ f((0, 1, -1)) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 1, 1) \end{aligned}$$

Escribir la matriz de  $f$  respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .  
Mostrar que  $f$  es inversible y calcular la matriz de  $f^{-1}$ .

- c) Interpretar  $f$  geoméricamente.

## I.2. Espacios Euclidianos

En la sección precedente hemos considerado el espacio  $\mathcal{P}$ , como un conjunto asociado a un espacio vectorial  $V$  de dimensión 3, sin haber introducido las nociones de ángulo, longitud y distancia.

### Producto escalar, norma y distancia

**Definición I.2.1** Un producto escalar sobre  $V$  (espacio vectorial) es una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que es:

i) *bilineal*:  $\langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \beta\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle,$   
 $\langle \vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \beta\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle;$

ii) *simétrica*:  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle;$

iii) *definida positiva*:  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$  y  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

El espacio  $V$  provisto de un producto escalar, se llama espacio vectorial euclidiano y se lo denota por  $E$

**Proposición I.2.1** Sea  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  una base de  $E$  espacio vectorial euclidiano. Entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  está determinado por los reales  $g_{i,j} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$   $i, j = 1, 2, 3$ . Además si  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ , se tiene

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2.1})$$

**Demostración.-** Se tiene

$$x = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad y = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3,$$

introduciendo al producto escalar, utilizando la bilinearidad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}_{g_{ij}} \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Definición I.2.2** En  $E$  espacio vectorial euclidiano, se plantea

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}, \quad \vec{x} \in E, \quad (\text{I.2.2})$$

llamada norma (euclidiana) de  $\vec{x}$ .

**Proposición I.2.2** La norma verifica:

- i) Positividad:  $\|\vec{x}\| \geq 0$  y  $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0$ .
- ii) Homegeneidad:  $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ .
- iii) Desigualdad de Cauchy-Schwarz:  $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ .
- iv) Desigualdad del triángulo:  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .
- v) Teorema del coseno:  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ .

**Demostración.-** Ejercicio.

□

**Definición I.2.3**  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  espacio euclidiano son ortogonales si  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  y se denota  $\vec{x} \perp \vec{y}$

**Ejemplo I.2.1**  $\vec{0} \perp \vec{x} \forall \vec{x} \in E$ , en efecto

$$\langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0 \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0.$$

Además  $\vec{0}$  es el único vector ortogonal a todos los vectores de  $E$ . Sea  $\vec{a} \in E$  un vector con esta propiedad

$$\vec{a} \perp \vec{a} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

**Proposición I.2.3** *Vectores no nulos, dos a dos ortogonales, son linealmente independientes*

**Demostración.-** Sea  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  no nulos y ortogonales 2 a 2; es decir  $\vec{x} \perp \vec{y}$ ,  $\vec{x} \perp \vec{z}$  e  $\vec{y} \perp \vec{z}$ , se tiene

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \beta \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \gamma \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0 & \Rightarrow \alpha \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0, \\ \alpha \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \beta \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + \gamma \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{0} \rangle = 0 & \Rightarrow \beta \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0, \\ \alpha \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle + \beta \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle + \gamma \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{0} \rangle = 0 & \Rightarrow \gamma \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0. \end{cases}$$

□

**Definición I.2.4** *Una base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  de  $E$  espacio euclidiano es ortogonal si*

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle. \quad (\text{I.2.3})$$

*Se dirá  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  es ortonormal, si además de ortogonal,*

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1. \quad (\text{I.2.4})$$

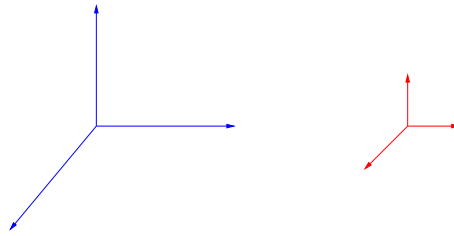


Figura I.2.1: Bases ortogonales y ortonormales

**Remarca I.2.1** Las matrices  $(g_{ij})$  de (I.2.1) son para una base ortogonal y ortonormal

$$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Por consiguiente, en una base ortonormal, el producto escalar se escribe

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ .

**Proposición I.2.4** Existe una base ortonormal de  $E$  espacio euclidiano.

**Demostración.-** La demostración será hecha utilizando el Procedimiento de Gram-Schmidt. Sea  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  una base cualquiera de  $E$ , remarcamos que esta base existe, ya que  $E$  es de dimensión 3.

Planteamos  $\vec{e}'_1 = \lambda \vec{e}_1$  con  $\lambda > 0$  y  $\|\vec{e}'_1\| = 1$ , obtenemos  $\lambda = \frac{1}{\|\vec{e}_1\|}$ . Ahora planteamos

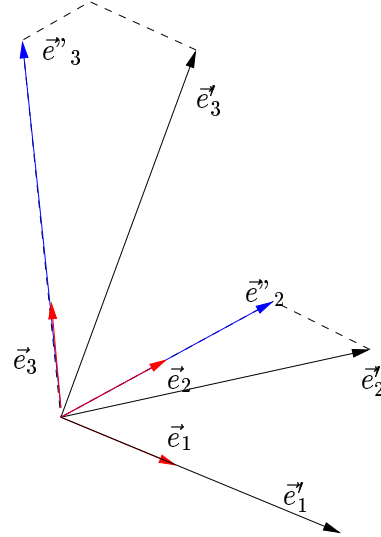
$$\begin{aligned} \vec{e}''_2 &= \mu_1 \vec{e}'_1 + \vec{e}_2 \text{ con } \vec{e}''_2 \perp \vec{e}'_1, \\ 0 = \langle \vec{e}''_2, \vec{e}'_1 \rangle &= \mu \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \Rightarrow \mu = -\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle, \\ \vec{e}''_2 &= -\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}'_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\|\vec{e}''_2\|}. \end{aligned}$$

Finalmente planteamos  $\vec{e}'''_3 = \gamma_1 \vec{e}'_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  con  $\vec{e}'''_3 \perp \vec{e}'_1$  y  $\vec{e}'''_3 \perp \vec{e}_2$ , obtenemos

$$\gamma_1 = -\langle \vec{e}'''_3, \vec{e}'_1 \rangle, \quad \gamma_2 = -\langle \vec{e}'''_3, \vec{e}_2 \rangle,$$

de donde

$$\vec{e}'_3 = -\langle \vec{e}'''_3, \vec{e}'_1 \rangle \vec{e}'_1 - \langle \vec{e}'''_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{e}'_3\|} \vec{e}'_3.$$



□

La elección de un producto escalar en  $V$  espacio vectorial asociado a  $\mathcal{E}$  da una estructura suplementaria a  $\mathcal{E}$ , llamando de esta manera a  $\mathcal{E}$  espacio afín euclidiano. Para  $X, Y \in \mathcal{E}$

$$\text{dist}(X, Y) = d(X, Y) = \|\overrightarrow{XY}\| \tag{I.2.5}$$

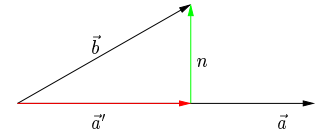
es la distancia (euclidiana) entre  $X$  e  $Y$ .

**Proyecciones ortogonales**

Una de las aplicaciones inmediatas del producto escalar es la determinación de proyecciones ortogonales.

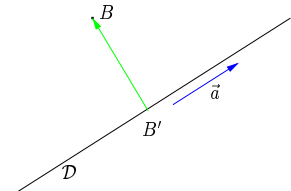
**Definición I.2.5** Sea  $\vec{b} \in E$ ,  $D = D_{\vec{a}} \subset E$  una recta vectorial, se llama la proyección (ortogonal) de  $\vec{b}$  sobre  $D$  al vector  $\vec{b}'$  tal

$$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{n}, \quad \text{con } \vec{b}' \in D \text{ y } \vec{n} \perp \vec{a}. \tag{I.2.6}$$



A  $\vec{b}'$  se lo denota por  $\text{pröy}_D \vec{b}$ .

Sea  $B \in \mathcal{E}$  y  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$  de dirección  $\vec{a}$ . La proyección (ortogonal) de  $B$  sobre  $\mathcal{D}$  es el punto  $B' \in \mathcal{D}$  tal que  $\overrightarrow{B'B} \perp \vec{a}$ , se la denota por  $\text{pröy}_{\mathcal{D}} B$ .



**Proposición I.2.5** Si  $D = D_{\vec{a}}$ , se tiene:

$$\text{pröy}_D \vec{b} = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \vec{a} = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}. \tag{I.2.7}$$

**Demostración.-** Por definición de  $\vec{n}$  y  $\text{pröy}_{\vec{a}} \vec{b}$  se tiene

$$\vec{n} = \vec{b} - \text{pröy}_D \vec{b}, \quad \vec{n} \perp \vec{a} \Rightarrow \langle \vec{b} - \lambda \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0,$$

de donde

$$\lambda = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

□

**Remarca I.2.2** Sea  $B \in \mathcal{E}$  y  $\mathcal{D}$  una recta del espacio, se tiene

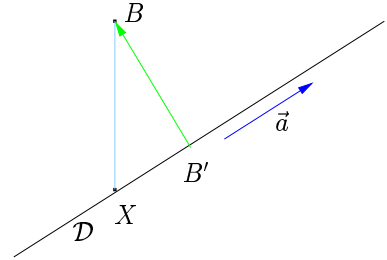
$$\text{dist}(B, \mathcal{D}) = \text{dist}(B, \text{proy}_{\mathcal{D}} B).$$

En efecto, se  $X \in \mathcal{D}$ , por Chasles, se tiene  $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XB'} + \overrightarrow{B'B}$  donde  $B' = \text{proy}_{\mathcal{D}} B$ . Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene

$$\|\overrightarrow{XB}\|^2 = \|\overrightarrow{XB'}\|^2 + \|\overrightarrow{B'B}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{XB}\|^2 \geq \|\overrightarrow{B'B}\|^2,$$

de donde

$$\text{dist}(X, B) \geq \text{dist}(B', B).$$

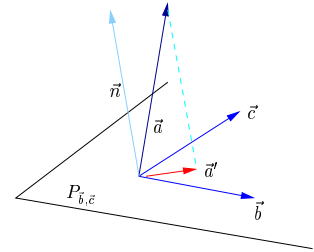


**Definición I.2.6** Sea  $\vec{a} \in E$ ,  $P = P_{\vec{b}, \vec{c}} \subset E$  un plano vectorial, se llama la proyección (ortogonal) de  $\vec{a}$  sobre  $P$  al vector  $\vec{a}'$  tal

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{n}, \quad \text{con } \vec{a}' \in P \text{ y } \vec{n} \perp \vec{b}, \vec{c}. \quad (\text{I.2.8})$$

A  $\vec{a}'$  se lo denota por  $\text{pröy}_P \vec{a}$ .

Sea  $A \in \mathcal{E}$  y  $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$  de dirección  $\vec{b}, \vec{c}$ . La proyección (ortogonal) de  $A$  sobre  $\mathcal{P}$  es el punto  $A' \in \mathcal{P}$  tal que  $\overrightarrow{A'A} \perp \vec{b}, \vec{c}$ , se la denota por  $\text{proy}_{\mathcal{P}} A$ .



**Proposición I.2.6** Sea  $P_{\vec{b}, \vec{c}}$  un plano vectorial,  $\vec{a} \in E$ , entonces  $\text{pröy}_P \vec{a}$  existe y es independiente de la elección de  $\vec{b}, \vec{c}$  direcciones del plano.

**Demostración.-** Ejercicio

□

La remarca (I.2.2) es válida, si se reemplaza recta por plano.

### Subespacios ortogonales

Con frecuencia decimos que una recta es ortogonal a otra recta o una recta es ortogonal a un plano, formalicemos estas ideas de ortogonalidad.

**Definición I.2.7** Sea  $\mathfrak{A} \neq \emptyset$  de  $E$  espacio vectorial euclidiano. El ortogonal de  $\mathfrak{A}$  es el subconjunto de  $E$ ,

$$\mathfrak{A}^\perp = \{\vec{x} \in E \mid \forall \vec{a} \in \mathfrak{A} \vec{x} \perp \vec{a}\}. \quad (\text{I.2.9})$$

**Proposición I.2.7** *Se tiene:*

- i) Si  $\mathfrak{A} \neq \emptyset$  entonces  $\mathfrak{A}^\perp$  es un subespacio vectorial de  $E$ .
- ii) Si  $H \subset E$  es un subespacio vectorial, entonces  $H \oplus H^\perp$ <sup>3</sup>; es decir todo  $\vec{v} \in E$  se escribe de manera única  $\vec{v} = \vec{h} + \vec{k}$  con  $h \in H$  y  $k \in H^\perp$ .
- iii) Si  $H \subset E$  es un subespacio vectorial, entonces  $(H^\perp)^\perp = H$ .

**Demostración.-**

- i)  $A^\perp \neq \emptyset$  porque  $\vec{0}$  es ortogonal a todo vector, en particular a los elementos de  $\mathfrak{A}$ .  
Sea  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathfrak{A}^\perp$  entonces para todo  $\vec{a} \in \mathfrak{A}$  se tiene

$$\langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{a} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle + \beta\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle = 0,$$

de donde  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \perp \vec{a}$  y  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \mathfrak{A}^\perp$ .

- ii) Si  $H$  es subespacio, por el inciso i)  $H^\perp$  es un subespacio. Tanto para  $H$  recta o plano vectorial, se tiene para  $\vec{v} \in E$  dado

$$\vec{v} = \text{pr}\vec{o}y_H \vec{v} + \vec{n}, \quad \text{con } \text{pr}\vec{o}y_H \vec{v} \in H \text{ y } \vec{n} \in H^\perp.$$

La unicidad de la suma la dejamos como ejercicio.

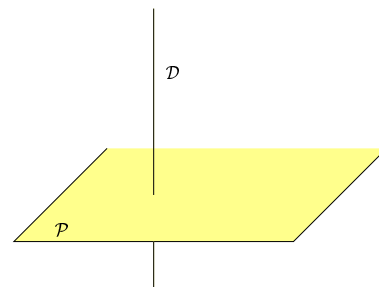
- iii) Por el inciso ii), se tiene  $E = H \oplus H^\perp = (H^\perp)^\perp \oplus H^\perp$ , de donde  $\dim H = \dim(H^\perp)^\perp$ . Sea  $\vec{x} \in H$ ,  $\vec{x} \perp \vec{y} \in H^\perp \forall y \in H^\perp$ , de donde  $x \in (H^\perp)^\perp$ , es decir  $H \subset (H^\perp)^\perp$ , de donde  $H = (H^\perp)^\perp$ .

□

**Definición I.2.8** Sean  $H_1, H_2$  subespacios de  $E$  espacio euclidiano, se dirá que  $H_1 \perp H_2$  si  $\forall \vec{a} \in H_1, \forall \vec{b} \in H_2$ , se tiene  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Definición I.2.9** Sea  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  dos subespacios afines (recta o plano) de direcciones  $H_1, H_2$  respectivamente. Se dirá que  $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$  si:

- i)  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ ,
- ii)  $H_1 \perp H_2$



**Remarca I.2.3** Para que dos rectas del espacio sean ortogonales es necesario que se intersecten.

### Espacios afines euclidianos orientados

El sentido de orientación en nuestra vivencia cotidiana está altamente desarrollado de manera intuitiva. Tenemos desarrollado el concepto de arriba y abajo, derecha e izquierda y delante y detrás. Formalizaremos el concepto de orientación en la geometría.

**Definición I.2.10** Una base ordenada es darse  $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  tripleta ordenada de vectores de una base.

<sup>3</sup> $\oplus$  se llama suma directa de subespacios y se tiene  $\dim H + \dim H^\perp = 3, H \cap H^\perp = \{0\}$ .

**Definición I.2.11** Sean  $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  y  $\mathfrak{B}' = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$  dos bases ordenadas (no necesariamente ortonormales) de  $E$  y  $P_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}$  la matriz de cambio de base, de la base  $\mathfrak{B}$  a la base  $\mathfrak{B}'$ . Se dirá que:

- i)  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$  definen la misma orientación  $\iff \det P_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} > 0$
- ii)  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$  definen orientaciones inversas  $\iff \det P_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} < 0$

Esta definición nos permite clasificar las bases de  $E$  en dos clases, una que la llamaremos directa y la otra inversa.

**Definición I.2.12** Un espacio euclidiano orientado es un espacio euclidiano orientado  $E$  con la elección de una orientación a la que se llamará orientación directa.

#### Remarca I.2.4

1. El concepto de orientación se lo construye de la misma manera, para rectas y planos vectoriales, utilizando bases ordenadas y el determinante de la matriz de cambio de base.
2. Una orientación de  $E$  espacio de dimensión 3, no da de manera automática una orientación de  $P$  plano vectorial, es necesario elegir antes un “lado” del plano.
3. La regla de la mano derecha sirve para determinar las orientaciones directas.
4. Si  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  son dos bases ortonormales, entonces la matriz de cambio de base  $P$  es una matriz ortogonal, es decir  $PP^t = P^tP = I$ .

**Definición I.2.13 (Lado de un plano.-)** La elección de un lado de un plano vectorial  $P$ , se la realiza eligiendo  $\vec{c} \notin P$  y se dirá que  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  base ordenada de  $P$  es directa si  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  es una base directa de  $E$ .

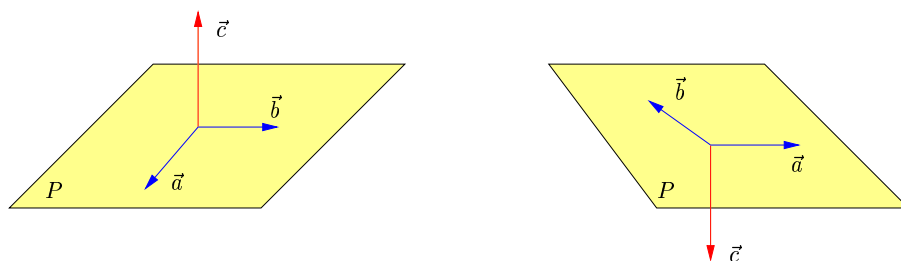


Figura I.2.2: Elección del lado de un plano

#### Producto vectorial o cruz

Siendo  $E$  un espacio euclidiano orientado, dados  $\vec{a}, \vec{b} \in E$ , seríde gran utilidad contar con una aplicación que nos proporcione  $\vec{c}$ , de manera que  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  sea una triplete de vectores con orientación directa y en lo posible  $\vec{a}, \vec{b} \perp \vec{c}$ .

**Definición I.2.14 (Producto vectorial o cruz.-)** El producto vectorial o cruz es la aplicación bilineal

$$\wedge : E \times E \rightarrow E \quad \text{o} \quad \times : E \times E \rightarrow E,$$

tal que para una base ordenada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  directa se tiene

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = 0 \end{array} \quad (\text{I.2.10})$$

**Proposición I.2.8** *El producto vectorial o cruz satisface:*

i) Para  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  base ortonormal directa, se tiene la siguiente fórmula,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.2.11})$$

ii) Es antisimétrico:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ .

iii) El producto vectorial no depende de la elección de la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  ortonormal directa.

iv)  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , entonces  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$

v)  $\vec{b}, \vec{c}$  colineales  $\iff \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{0}$ .

vi)  $\vec{b}, \vec{c}$  linealmente independientes, entonces  $\{\vec{b}, \vec{c}\}$  base directa.

**Demostración.-** Los puntos i), ii), iv), v) y vi) ejercicio, aplicar la definición de aplicación bilineal y en los puntos que amerite utilizar propiedades de determinante.

Mostremos el punto iii). Sean  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  y  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  dos bases ortonormales directas, suficiente mostrar que si (I.2.10) se cumple para  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , entonces (I.2.10) se cumple para  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ . Sea

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de base de la base  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  a la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .  $Q$  es ortogonal ( $Q^t Q = I$ ) y como son bases directas  $\det Q = 1$ , lo que se traduce en

$$\sum_{i=1}^3 q_{ji} q_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (\text{I.2.12})$$

Comencemos mostrando que  $\vec{e}'_i \wedge \vec{e}'_i = \vec{0}$ . En efecto

$$\vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ q_{1i} & q_{2i} & q_{3i} \\ q_{1i} & q_{2i} & q_{3i} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

por que las dos últimas filas del determinante son las mismas.

Ahora mostremos que  $\vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 = \vec{e}'_3$ . Planteamos  $\vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 = \alpha_1 \vec{e}'_1 + \alpha_2 \vec{e}'_2 + \alpha_3 \vec{e}'_3$ . Como  $\vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 \perp \vec{e}'_1, \vec{e}'_2$  se tiene que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . El siguiente paso es verificar que  $\alpha_3 = 1$ , en efecto

$$\alpha_3 = \langle \vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = \begin{vmatrix} q_{21} & q_{31} \\ q_{22} & q_{32} \end{vmatrix} q_{13} - \begin{vmatrix} q_{11} & q_{31} \\ q_{12} & q_{32} \end{vmatrix} q_{23} + \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix} q_{33} = \begin{vmatrix} q_{13} & q_{23} & q_{33} \\ q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{13} \end{vmatrix} = \det Q^t = 1.$$

Los otros productos, lo hacemos de la misma manera.

□

La demostración ha incorporado  $\langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$  relación que nos será útil.

**Definición I.2.15 (Producto mixto o triple)** Sea  $E$  espacio euclidiano orientado, el producto mixto de  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  está dado por

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad (\text{I.2.13})$$

**Proposición I.2.9** El producto mixto o triple cumple:

i)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linealmente independientes  $\iff [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ ;

ii) es trilineal.

iii)  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$ .

iv) Sea  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  una base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned} [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1 &\iff \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ directa,} \\ [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = -1 &\iff \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ inversa.} \end{aligned}$$

**Demostración.-** Ejercicio

□

A continuación algunas fórmulas que involucran productos escalares, vectoriales y mixtos.

**Proposición I.2.10** Se tiene:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}, \quad (\text{I.2.14})$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{d}, \quad (\text{I.2.15})$$

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \wedge \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle. \quad (\text{I.2.16})$$

**Demostración.-** Ejercicio

□

## Círculos, esferas y ángulos

**Definición I.2.16 (Esferas, circunferencias)** Sea  $A \in \mathcal{E}$  y  $r > 0$ :

i) La esfera de centro  $A$  y radio  $r$  es el subconjunto

$$\mathcal{S}_{A,r} = \{X \in \mathcal{E} \mid \|\overrightarrow{AX}\| = r\}. \quad (\text{I.2.17})$$

ii) La circunferencia de centro  $A$ , radio  $r$  sobre el plano  $\mathcal{P}$ , ( $A \in \mathcal{P}$ ), es la intersección de la esfera de centro  $A$  y radio  $r$ , con el plano  $\mathcal{P}$ ; es decir,

$$C_{A,r,\mathcal{P}} = \{X \in \mathcal{P} \mid \|\overrightarrow{AX}\| = r\}. \quad (\text{I.2.18})$$

**Definición I.2.17 (Círculo trigonométrico)** El círculo trigonométrico sobre el plano vectorial  $P$  es

$$C_P = \{\vec{x} \in P \mid \|\vec{x}\| = 1\}. \quad (\text{I.2.19})$$

Sea  $P$  un plano vectorial con  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  base directa ortonormal. Sobre el círculo trigonométrico  $C_P$  suponemos la existencia de una función  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow C_P$  sobreyectiva y  $2\pi$  periódica tal que:

$$\Phi(\vartheta) = \vec{e}_1 \iff \vartheta \in \pi\mathbb{Z} = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad (\text{I.2.20})$$

por un lado y por el otro

$$\Phi(\vartheta) = \cos \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2, \quad (\text{I.2.21})$$

donde  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   $2\pi$  periódicas.

Además suponemos que  $\Phi$  induce una familia de transformaciones lineales que conservan la orientación y la ortogonalidad, que llamamos rotaciones.

**Axioma I.2.1** Una rotación de ángulo  $\vartheta$  es una transformación lineal  $r_\vartheta$  que conserva la orientación, la ortogonalidad tal que

$$r_\vartheta(C_P) = C_P, \quad \text{y} \quad r_\vartheta(\vec{e}_1) = \Phi(\vartheta) = \cos \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2. \quad (\text{I.2.22})$$

La composición de rotaciones satisface

$$r_{\vartheta_1} \circ r_{\vartheta_2} = r_{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \quad (\text{I.2.23})$$

**Teorema I.2.1** La matriz  $R_\vartheta$  respecto a la base ortonormal directa  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de una rotación de ángulo  $\vartheta$ ,  $r_\vartheta$  es

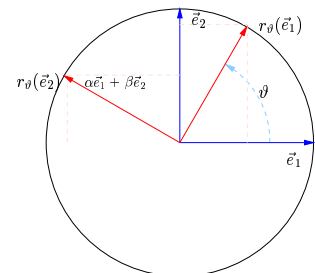
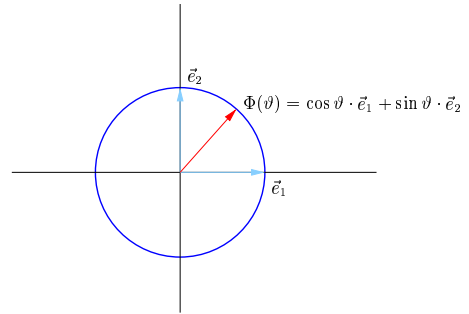
$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2.24})$$

**Demostración.-** Debemos mostrar que  $r_\vartheta(\vec{e}_2) = -\sin \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \cos \vartheta \cdot \vec{e}_2$ . Planteamos  $r_\vartheta(\vec{e}_2) = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$ , como  $r_\vartheta(\vec{e}_2) \in C_P$ , se tiene  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Como  $r_\vartheta$  conserva la ortogonalidad, se tiene  $\langle r_\vartheta(\vec{e}_1), r_\vartheta(\vec{e}_2) \rangle = 0$ , lo que da

$$\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta = 0 \implies \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \beta \\ -\sin \vartheta & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

por lo tanto la segunda columna del determinante es colineal con la primera columna, de donde  $\beta = \lambda \cos \vartheta$  y  $\alpha = -\lambda \sin \vartheta$ . Reemplazando estas identidades en la condición  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , se obtiene que  $\lambda^2 = 1$ .



Por otro lado  $\{r_\vartheta(\vec{e}_1), r_\vartheta(\vec{e}_2)\}$  es una base ortonormal directa, ya que  $r_\vartheta$  conserva la orientación. La matriz de cambio de base de  $\{r_\vartheta(\vec{e}_1), r_\vartheta(\vec{e}_2)\}$  a  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  es la misma matriz de la rotación

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\lambda \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = R_\vartheta.$$

El determinante es  $\det R_\vartheta = \lambda$ , como  $\lambda > 0$  se tiene necesariamente que  $\lambda = 1$ .

□

## Ángulos

**Definición I.2.18 (Ángulo orientado)** Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in P$  no nulos, el ángulo orientado entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  es el ángulo de la rotación que envía  $\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$  a  $\frac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b}$ .

Para  $\vec{a}, \vec{b} \in E$  no nulos, se toma un plano  $P$  que contenga ambos vectores.

**Remarca I.2.5** Para efectos del curso, los ángulos orientados toman valores en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

Por consiguiente si  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in (-\pi, \pi)$ , se tiene  $\angle(\vec{b}, \vec{a}) = -\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in (-\pi, \pi)$ , y si  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ , entonces  $\angle(\vec{b}, \vec{a}) = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ .

**Definición I.2.19 (Ángulo no orientado)** Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in P$  no nulos, el ángulo (no orientado) entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  es

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \angle(\vec{a}, \vec{b}) & \text{si } \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi] \\ \angle(\vec{b}, \vec{a}) & \text{si } \angle(\vec{a}, \vec{b}) \in (-\pi, 0) \end{cases} \quad (\text{I.2.25})$$

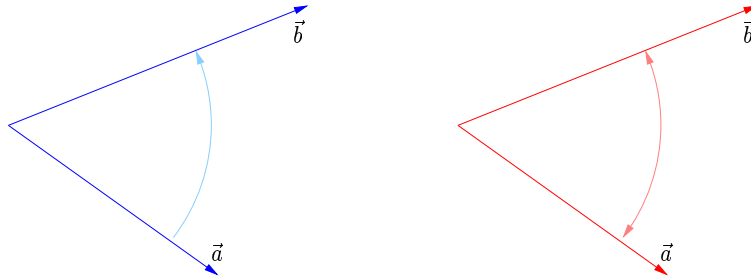


Figura I.2.3: Ángulos orientados y no orientados

Sean  $\vec{a}, \vec{b} \in E$  no nulos y sea  $P$  un o el plano vectorial que contiene  $\vec{a}, \vec{b}$ , consideremos una base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  ortonormal directa del plano  $P$ , de manera que  $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{e}_1$ , sea  $\vartheta = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ , se tiene:

$$\vec{b} = \|\vec{b}\| (\cos \vartheta \vec{e}_1 + \sin \vartheta \vec{e}_2), \quad (\text{I.2.26})$$

de donde:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \vartheta, \quad (\text{I.2.27})$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \vartheta \vec{e}_3, \quad (\text{I.2.28})$$

con  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  base ortonormal y directa de  $E$ .

Como  $\cos \vartheta = \cos(-\vartheta)$ , en lugar del ángulo orientado, se puede reemplazar (I.2.27) por ángulo no orientado.

**Proposición I.2.11** *Se tiene:*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})), \tag{I.2.29}$$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))|. \tag{I.2.30}$$

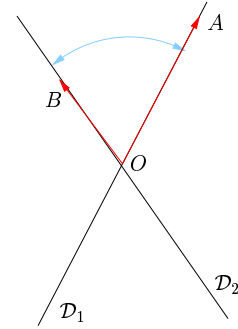
**Demostración.-** Ejercicio. □

La noción de ángulo puede ser transportada al espacio  $\mathcal{E}$  para objetos geométricos como: rectas con rectas, planos con planos y rectas con planos.

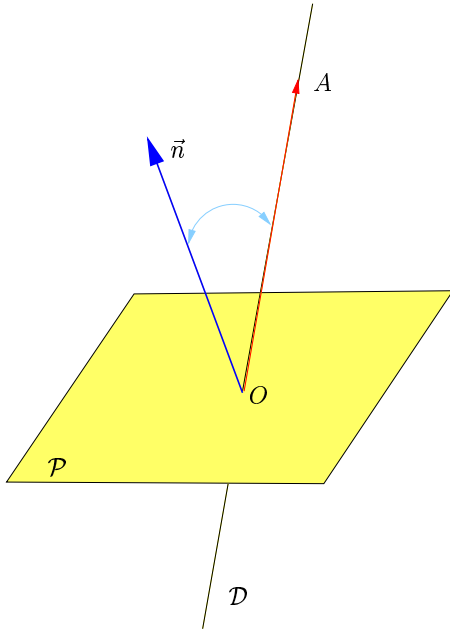
Veamos primero el caso de dos rectas  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , sea  $O \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$  un punto de intersección, para hablar de ángulo es necesario que la intersección de las rectas no sea vacía.

El siguiente paso es elegir un punto  $A \neq O \in \mathcal{D}_1$  y otro punto  $B \neq O \in \mathcal{D}_2$  (que definen las direcciones positivas de las rectas en cuestión). Planteamos

$$\angle(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \tag{I.2.31}$$



Remarcamos que si se tiene de antemano definida las direcciones positivas de  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , dicha elección presenta 4 posibilidades diferentes.



Ahora analisemos el caso de un plano y una recta que se intersecan. Sean  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D}$  un plano y una recta que se intersecan en un punto  $O$ .

Sea  $\vec{n}$  un vector normal de  $\mathcal{P}$ , cuyo sentido corresponde a la cara positiva del plano y elijamos un punto  $A \in \mathcal{D}$ , de manera que  $\overrightarrow{OA}$  define el sentido positivo de la recta  $\mathcal{D}$ . Planteamos:

$$\angle(\mathcal{D}, \mathcal{P}) = \angle(\overrightarrow{OA}, \vec{n}). \tag{I.2.32}$$

Al igual que en el caso de las rectas, tenemos cuatro posibilidades, si las direcciones positivas no están definidas de antemano.

Para el caso de dos planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  de intersección no vacía, se toman  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  los respectivos vectores normales, orientados en sentido positivo y se plantea

$$\angle(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2). \tag{I.2.33}$$

### Longitud, área y volumen

**Definición I.2.20 (Segmento de Recta)** Sean  $A, B \in \mathcal{E}$ , el segmento de recta de extremidades  $A$  y  $B$  es el subconjunto

$$\overline{AB} = [A, B] = \{X \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\}.$$

y la longitud del segmento  $\overline{AB}$  es

$$\text{long } \overline{AB} = \text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Esta definición puede ser generalizada a líneas poligonales.

**Definición I.2.21** Una línea poligonal es la unión finita de segmentos de recta de la forma  $\overline{A_{k-1}A_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  con  $A_{k-1} \neq A_{k+1}$ . Se la denota por  $LP_{A_0, A_1, \dots, A_n}$ . La longitud de esta línea poligonal está dada por

$$\text{long}(LP_{A_0, A_1, \dots, A_n}) = \sum_{k=1}^n \text{long}(\overline{A_{k-1}A_k}). \quad (\text{I.2.34})$$

## Areas

**Definición I.2.22 (Área polígono)** Sea  $\mathfrak{P}$  el conjunto de los polígonos de  $\mathcal{E}$ . El área es una función

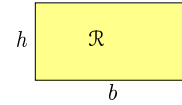
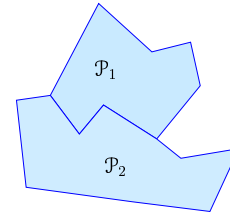
$$\begin{aligned} \text{Area} : \mathfrak{P} &\longrightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{P} &\longmapsto \text{Area}(\mathcal{P}) \end{aligned} \quad (\text{I.2.35})$$

aditiva; es decir si  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  con  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  vacío o eventualmente una línea poligonal, entonces

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{P}_1) + \text{Area}(\mathcal{P}_2). \quad (\text{I.2.36})$$

y el área de un rectángulo  $\mathcal{R}$  de base  $b$  y altura  $h$  es

$$\text{Area} \mathcal{R} = b \cdot h. \quad (\text{I.2.37})$$



**Proposición I.2.12** Se tiene:

i) Sea  $\mathcal{P}$  un paralelogramo de vértices  $A, B, C, D$ , entonces

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|. \quad (\text{I.2.38})$$

ii) Sea  $\mathcal{T}$  un triángulo de vértices  $A, B, C$ , entonces

$$\text{Area}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|. \quad (\text{I.2.39})$$

## Demostración.-

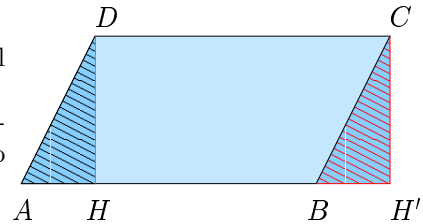
i) Consideremos el paralelogramo de vértices  $A, B, C, D$ . Sea  $H$  la proyección ortogonal del punto  $D$  sobre la recta que pasa por  $A$  y  $B$ . Mediante una traslación  $t_{A,B}$  enviamos el triángulo  $AHD$ , sobre el triángulo  $BH'C$ .

El área es invariante por traslación, de donde el área del paralelogramo  $A, B, C, D$  es igual al área del rectángulo  $H, H', C, D$ . Por lo tanto

$$\text{Area}(\mathcal{R}_{H, H', C, D}) = \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\overrightarrow{HD}\|.$$

y  $\|\overrightarrow{HD}\| = \|\overrightarrow{AD}\| \left| \sin(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})) \right|$ , por consiguiente

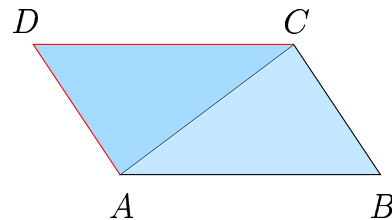
$$\text{Area}(\mathcal{P}_{A, B, C, D}) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$



ii) Consideremos el triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ . Sea  $D \in \mathcal{P}$  tal que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .  
Tenemos

$$\text{Area}(\mathcal{P}_{A,B,C,D}) = \text{Area}(\mathcal{T}_{A,B,C}) + \text{Area}(\mathcal{T}_{A,C,D}).$$

Ahora bien, el  $\mathcal{T}_{A,C,D}$  se obtiene del  $\mathcal{T}_{A,B,C}$  rotando  $\pi$  sobre el punto  $A$  y luego trasladando  $\overrightarrow{AC}$ , de donde las áreas son idénticas.  
Por el inciso i) precedente, se tiene la identidad enunciada.



□

### Volumen

**Definición I.2.23 (Volumen Poliedro)** Sea  $\mathfrak{S}$  el conjunto de los poliedros de  $\mathcal{E}$ . El volumen es una función

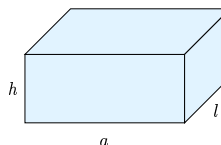
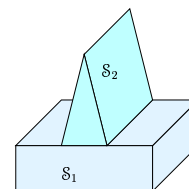
$$\begin{aligned} \text{Vol} : \mathfrak{S} &\longrightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R} \\ \mathfrak{S} &\longmapsto \text{Vol}(\mathfrak{S}) \end{aligned} \tag{I.2.40}$$

aditiva; es decir si  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$  con  $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$  vacío o eventualmente una línea poligonal o un polígono, entonces

$$\text{Vol}(\mathfrak{S}) = \text{Vol}(\mathfrak{S}_1) + \text{Vol}(\mathfrak{S}_2). \tag{I.2.41}$$

y el volumen de un paralelepípedo rectangular  $\mathfrak{S}$  de largo  $l$  ancho  $a$  y altura  $h$  es

$$\text{Vol} \mathfrak{S} = a \cdot l \cdot h. \tag{I.2.42}$$

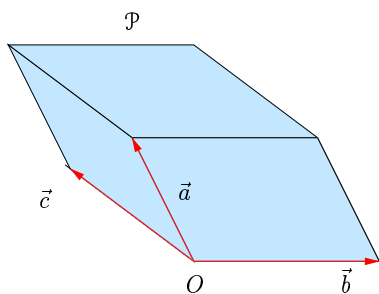


**Proposición I.2.13** Sea

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{E} \mid X = O + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \lambda \vec{c}, \alpha, \beta, \lambda \in [0, 1]\}$$

el paralelepípedo de vértice  $O$  y generado por  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .  
El volumen de  $\mathcal{P}$  es

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|. \tag{I.2.43}$$



**Demostración.-** Ejercicio

□

### Ejercicios

1. Mostrar que las tres alturas de un triángulo cualquiera se cortan en un punto.
2. Calcular la distancia del punto  $Q = (2, 1, 3)$ :
  - a) a la recta de ecuación  $x = \frac{y-2}{4} = z$ ,
  - b) al plano de ecuación  $x - 3y + z + 2 = 0$ .

3. Sean  $A, B, C$  tres puntos no alineados del espacio. Utilizando la noción de producto escalar, mostrar que el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia de  $A, B$  y  $C$  es una recta.
4. Sean  $A, B, C$  tres puntos no alineados del espacio. Mostrar que existen tres esferas  $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B$  y  $\mathcal{S}_C$  centradas respectivamente en  $A, B$  y  $C$  que son dos a dos tangentes. Discutir la unicidad de la solución.
5. Calcular el ángulo que forman dos diagonales principales de un cubo.
6. Encontrar el centro y el radio de la esfera que pasa por  $(0, 1, 2), (1, -2, 1), (3, 2, 1)$  y  $(-1, 0, 5)$ .
7. Sea  $\mathcal{S}$  una esfera de centro  $A$  y  $\mathcal{D}$  una recta de dirección  $\vec{d}$ . Si  $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{T\}$ , mostrar que  $\langle \overrightarrow{AT}, \vec{d} \rangle = 0$ .
8. Mostrar que las medianas de un triángulo lo cortan en 6 triángulos de área igual.
9. Mostrar las fórmulas:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \wedge \vec{d} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle, \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{d}. \end{aligned}$$

10. Calcular la distancia entre la recta  $\mathcal{D}$  que pasa por los puntos  $(-1, 0, 3)$  y  $(2, 0, 1)$  y la recta  $\mathcal{D}'$  la intersección de los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  de ecuaciones”

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: x + 2y - z = 0, \\ \mathcal{P}_2 &: 3x - 5z = 0. \end{aligned}$$

11. Consideremos los tres puntos siguientes de un triángulo:

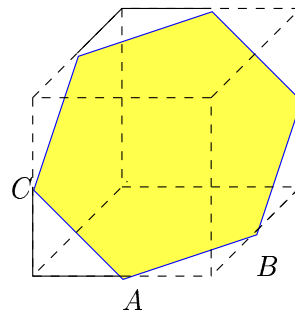
**H**= ortocentro,

**G**= baricentro,

**C**= centro de la circunferencia circunscrita.

Mostrar que  $H, G$  y  $C$  están alineados.

12. Sea  $\mathcal{P}$  un plano que pasa por el medio de tres aristas no coplanares y sin intersección común de un cubo (puntos  $A, B$  y  $C$  de la figura de la derecha). Mostrar que  $\mathcal{P}$  corta el cubo siguiendo un hexágono. Calcular el ángulo entre  $\mathcal{P}$  y una cara del cubo.



# Capítulo II

## Curvas y Superficies

En este capítulo se introducirá y formalizará las nociones de curva y superficie, haciendo un estudio de las propiedades y caracterizaciones de estos objetos del espacio.

Se verá, que tanto las curvas, como las superficies son un paso más en la generalización de las rectas y planos estudiados en el primer capítulo, así como los conceptos de longitud y área desarrollados antes.

Finalmente, en este segundo capítulo, se abordará el tema de sistemas de coordenadas y los cambios de variable.

### II.1. Curvas

#### Concepto de Curva

Iniciamos este capítulo con el estudio de curvas en el espacio y en el plano. La palabra curva, seguramente ya sido mencionada en cursos anteriores y es claro su significado intuitivo. En esta sección formalizaremos lo que es una curva y analizaremos sus propiedades más importantes.

En lo que sigue, consideramos  $\mathbb{R}^n$  con  $n = 2, 3$ ; como un espacio vectorial euclidiano.

**Definición II.1.1** *Un camino en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Se llama soporte o trayectoria a la imagen de éste; es decir  $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^3$ .*

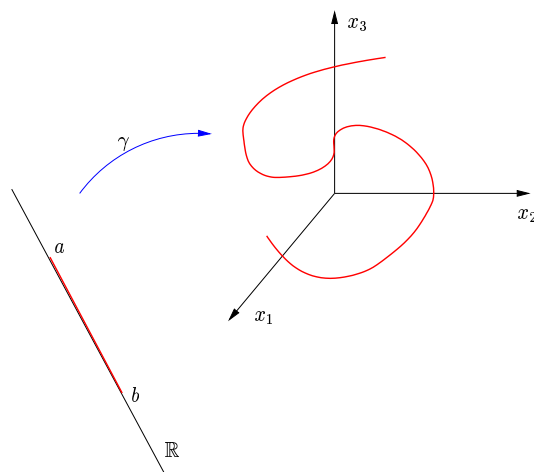


Figura II.1.1: Representación de un camino.

**Remarca II.1.1** Es importante distinguir bien camino y el soporte de un camino, en los siguientes ejemplos veremos porque.

### Ejemplo II.1.1

1. Consideremos, los caminos siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\gamma} : [0, 4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Ambos caminos, tienen el mismo soporte, una circunferencia de centro el origen y radio la unidad. Sin embargo, el primer camino recorre una vez la circunferencia, mientras que el segundo recorre dos veces la circunferencia.

2. El trozo de la parábola  $y = x^2$  restringido a  $0 \leq x \leq 1$ , es el soporte de los caminos

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t^2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\gamma} : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2, t^4) \end{array} .$$

Como puede observarse, ambos caminos tienen el mismo dominio y la misma imagen; sin embargo son diferentes, ¿por qué?

**Definición II.1.2**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos caminos en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  están relacionados si existe una aplicación  $\varphi : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$  continua y biyectiva tal que  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ . Denotamos  $\gamma \sim \tilde{\gamma}$  y  $\varphi$  se llama cambio de parametrización.

De la definición precedente deducimos, que si  $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ , entonces soporte  $\gamma =$  soporte  $\tilde{\gamma}$ .

**Proposición II.1.1** La relación  $\sim$  sobre el conjunto de los caminos es una relación de equivalencia.

**Demostración.-** Ejercicio. □

**Definición II.1.3** Una clase de equivalencia de caminos es una **curva**. Si en la relación  $\sim$  solo consideramos los cambios de parametrización  $\varphi$  creciente, la clase de equivalencia es una **curva orientada**. Sea  $\mathcal{C}$  una curva, un camino  $\gamma$  de la clase  $\mathcal{C}$  se llama una **representación paramétrica** de  $\mathcal{C}$  o **parametrización** de  $\mathcal{C}$ .

**Remarca II.1.2** Dos caminos inyectivos con el mismo soporte son equivalentes.

### Algunas aclaraciones del concepto de curva

El concepto de curva, dependiendo el contexto y el nivel de profundidad, tiene diferentes definiciones. Algunos veces es conveniente, trabajar en intervalos abiertos; por consiguiente, lo realizado anteriormente es válido si tomamos intervalos abiertos en lugar de los intervalos cerrados.

Muchas veces se confunde soporte con la curva misma. Ahora bien, la pregunta es ¿cuando un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n$  puede asociarse a una curva? La respuesta es cuando existe un camino cuyo soporte sea  $\mathcal{S}$ .

**Convención.-** Podemos decir que un conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  es una curva, si es el soporte de una clase de equivalencia de caminos.

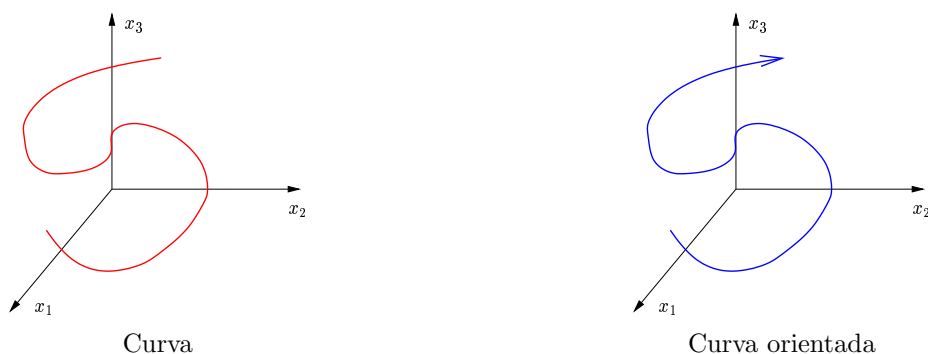


Figura II.1.2: Representación de curvas.

Hechas las aclaraciones necesarias, es costumbre representar una curva por su soporte, en la figura II.1.2 podemos apreciarlo.

### Longitud de una curva

Sea  $\mathcal{C}$  una curva,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ . Para una subdivisión  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \subset [a, b]$ , se considera

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \quad (\text{II.1.1})$$

Debe observarse que  $L(\gamma, P)$  es la longitud de la curva poligonal que une  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ ; ver la figura II.1.3 Si  $P \subset P'$  dos subdivisiones del intervalo  $[a, b]$ , se tiene

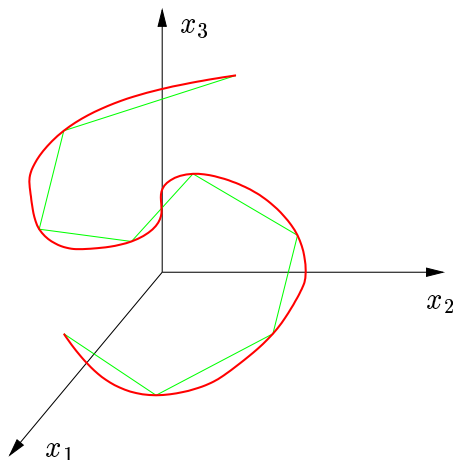


Figura II.1.3: Aproximación por arcos poligonales.

$$L(\gamma, P') \geq L(\gamma, P), \quad (\text{II.1.2})$$

por la desigualdad del triángulo. Se plantea

$$L(\gamma) = \sup_P L(\gamma, P) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \quad (\text{II.1.3})$$

la longitud del camino  $\gamma$ .

**Ejemplo II.1.2** El camino  $\gamma; [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t = 0 \\ (t, t \sin(\pi/t)) & \text{sino;} \end{cases}$$

tiene como longitud  $L(\gamma) = \infty$ .

Grafique este camino y demuestre la afirmación de del ejemplo.

**Proposición II.1.2** Si  $\gamma \sim \tilde{\gamma}$ , entonces  $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ .

**Demostración.-** Ejercicio

□

**Definición II.1.4** Una curva  $\mathcal{C}$  es **rectificable** si existe una parametrización  $\gamma$  de  $C$  con  $L(\gamma) < \infty$ . Se plantea  $L(\mathcal{C}) = L(\gamma)$  como **longitud** de  $C$ .

**Definición II.1.5** Sea  $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino representante de una curva  $\mathcal{C}$  rectificable. Se dice que  $\gamma$  es una **parametrización normal** de  $\mathcal{C}$  si  $L(\gamma_t) = t$ , para todo  $t \in [0, L]$ , donde  $\gamma_t$  es la restricción de  $\gamma$  en el intervalo  $[0, t]$ .

### Ejemplo II.1.3

1. Los caminos del ejemplo 1 de II.1.1 son parametrizaciones normales de curvas cuyos soportes son la circunferencia de radio 1 y centro el origen.
2. El camino  $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 2\pi, \\ (\cos t, \sin t) & \text{si } 2\pi \leq t \leq 4\pi, \end{cases}$$

representa a una curva que no admite una parametrización normal.

### Condiciones sobre la curva para tener una parametrización normal

Sea  $\mathcal{C}$  una curva rectificable de longitud  $L$ , sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ ; si es necesario efectuar un cambio de parametrización, podemos suponer que  $a = 0$ . Consideremos la familia de caminos  $\gamma_{s,t}$  restricciones de  $\gamma$  en los intervalos  $[s, t]$ , donde  $0 \leq s \leq t \leq b$ .

**Proposición II.1.3** La familia  $\gamma_{s,t}$  satisface:

$$0 \leq L(\gamma_{s,t}) \leq L, \quad (\text{II.1.4})$$

$$L(\gamma_{r,t}) = L(\gamma_{r,s}) + L(\gamma_{s,t}), \quad \forall 0 \leq r < s < t \leq b, \quad (\text{II.1.5})$$

$$\text{por (II.1.5) convenimos que } L(\gamma_{t,t}) = 0. \quad (\text{II.1.6})$$

**Demostración.-** Ejercicio.

□

**Proposición II.1.4** La función  $\psi : [0, a] \rightarrow [0, L]$  definida por

$$\psi(t) = L(\gamma_{0,t}) \quad (\text{II.1.7})$$

es continua y creciente.

**Demostración.-** La función  $\psi$  es creciente por (II.1.4) y (II.1.5) de la proposición precedente. Para la continuidad debemos mostrar que

$$\lim_{s \rightarrow t} \psi(s) = \psi(t).$$

Consideremos el caso en que  $s > 0$ , el otro es análogo. Tenemos

$$\psi(s) = \psi(t) + L(\gamma_{t,s});$$

por consiguiente, es suficiente mostrar que

$$\lim_{s \rightarrow t_+} L(\gamma_{t,s}) = 0.$$

Ahora bien, supongamos lo contrario, entonces existe  $t \in [0, b)$ , donde  $\lim_{s \rightarrow t_+} L(\gamma_{t,s}) \neq 0$ , lo que significa que existe  $\eta > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$  existe  $s$  con  $|t - s| < \delta$  y  $L(\gamma_{t,s}) \geq \eta$ . Por lo tanto, podemos construir una sucesión  $s_k$  estrictamente decreciente que tiende a  $t$  cuando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $L(\gamma_{t,s_k}) \geq \eta$ .

Utilizando (II.1.4) y (II.1.5) de la proposición precedente, la sucesión de término general  $L(\gamma_{t,s_k}) \geq \eta$  es una sucesión decreciente y minorada por  $\eta$ , en consecuencia, convergente; sea  $l$  su límite, remarcamos que  $l > 0$ . Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0$  tal que  $k \geq k_0$  implica  $l \leq L(\gamma_{t,s_k}) < l + \epsilon$ .

Tomemos  $k_0$ , utilizando la definición de  $L(\gamma_{t,s_{k_0}})$ , existe  $P_{k_0}$  subdivisión de  $[t, s_{k_0}]$  tal que

$$l - \epsilon < L(\gamma_{t,s_{k_0}}, P_{k_0}), \leq l + \epsilon, \quad (\text{II.1.8})$$

donde  $P_{k_0} = \{t = t_0 < t_1 < \dots < t_N = s_{k_0}\}$ .

Puesto que  $\gamma$  es uniformemente continua sobre  $[0, a]$ , para el  $\epsilon$  dado, existe  $\delta$  tal que  $|r - r'|$  implica  $\|\gamma(r) - \gamma(r')\| < \epsilon$ . Si es necesario volver más fina  $P_{k_0}$ , podemos suponer que  $t_1 - t, \delta$ . Sea  $k'$  tal que  $s_{k'} < t_1$  y  $P_{k'}$  una subdivisión de  $[t, s_{k'}]$  que verifique las desigualdades

$$l - \epsilon < L(\gamma_{t,s_{k'}}, P_{k'}), \leq l + \epsilon, \quad (\text{II.1.9})$$

Sea  $P = P_{k_0} \cup P_{k'}$  división de  $[t, s_{k_0}]$ ,  $P$  es más fina que  $P_{k_0}$ , por lo tanto, también verifica

$$l - \epsilon < L(\gamma_{t,s_{k_0}}, P), \leq l + \epsilon. \quad (\text{II.1.10})$$

De donde obtenemos

$$L(\gamma_{t,s_{k'}}, P_{k'}) + L(\gamma_{t,s_{k_0}}, P_{k_0}) = L(\gamma_{t,s_{k_0}}, P) + \|\gamma(t_1) - \gamma(t)\| - \|\gamma(t_1) - \gamma(s_{k'})\|,$$

pasando a valores absolutos, utilizando desigualdades del triangulo y (II.1.8), (II.1.9) y (II.1.10) obtenemos

$$2l - 2\epsilon \leq l + 3\epsilon,$$

de esta manera  $l \leq 5\epsilon$ ; lo que conduce a una contradicción. □

**Teorema II.1.1** Sea  $\mathcal{C}$  una curva rectificable, entonces  $\mathcal{C}$  admite una parametrización normal, si y solamente si, la aplicación  $\psi$  de la proposición precedente es estrictamente creciente.

**Demostración.-** Ejercicio. □

**Remarca II.1.3** En muchos problemas, se menciona como curva a un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n$ . En este caso, a menos que se especifique algo diferente, entenderemos  $\mathcal{S}$  como la curva de longitud mínima que admite una parametrización normal entre las curvas cuyo soporte es  $\mathcal{S}$ .

## Contacto y Tangencia

La noción de tangencia es un concepto presente en la geometría en todos sus niveles; dependiendo el contexto y la profundidad, las definiciones cambian, aunque al final signifiquen lo mismo. En este curso formularemos una definición de tangencia, como un concepto ligado a la noción de contacto entre dos objetos del espacio o plano.

**Definición II.1.6 (Tangencia)** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  con intersección no vacía, sea  $P \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ . Diremos que  $\mathcal{N}$  tiene **contacto de orden  $n$**  con  $\mathcal{M}$  en el punto  $P$ , si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sup_{X \in \bar{B}(P, \epsilon) \cap \mathcal{M}} d(X, \mathcal{N})}{\epsilon^n} = 0, \quad (\text{II.1.11})$$

donde  $d(X, \mathcal{N})$  es la distancia del punto  $X$  a  $\mathcal{N}$  y  $\bar{B} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X, P) \leq \epsilon\}$ . Si el orden de contacto es 1, diremos que  $\mathcal{N}$  **es tangente a  $\mathcal{M}$**  en el punto  $P$ .

### Remarca II.1.4

1. La noción de contacto relaciona subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , pero en general no es simétrica, ver figura II.1.4. Se puede mostrar que la recta  $\mathcal{L}$  es tangente al conjunto  $\mathcal{M}$ , pero el conjunto  $\mathcal{M}$  no es tangente a  $\mathcal{L}$ .
2. Si  $\mathcal{N}$  de la definición precedente es una recta,  $\mathcal{N}$  será una recta tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $P$ . Por otro lado, si existe una recta tangente, ésta es la que tiene mejor contacto con  $\mathcal{M}$  entre todas las rectas que pasan por  $P$ .

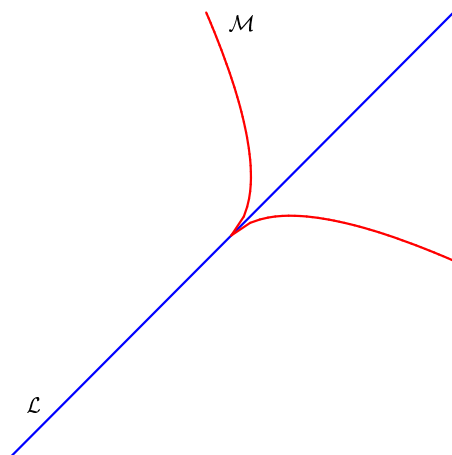


Figura II.1.4: Contacto entre curvas.

## Curvas Diferenciables

En la sección precedente hemos definido la noción de curva de la forma más general para los propósitos del curso; sin embargo, una gran cantidad de curvas que se estudian son “lisas”, motivo por el cual su estudio se amerita por sí solo.

**Definición II.1.7** Una curva  $\mathcal{C}$  se dice que es una **curva diferenciable** si  $\mathcal{C}$  es una clase de equivalencia de caminos diferenciables donde los cambios de parametrización ( $\varphi : [a, b] \rightarrow [\hat{a}, \hat{b}]$ ) son diferenciables, así como sus inversas.

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un camino, podemos expresar

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix},$$

donde  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son las funciones componentes de  $\gamma$ .

**Proposición II.1.5**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un camino diferenciable, si y solamente si los  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones componentes, son diferenciables.

**Demostración.-** Ver curso de Cálculo II. □

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un camino diferenciable,  $t \in [a, b]$ ; recordando, la derivada de  $\gamma$  en el punto  $t$  es una aplicación lineal que la denotamos por  $\gamma'(t)$  que satisface

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) + \gamma'(t)s + o(s), \quad (\text{II.1.12})$$

donde  $o(s)$  es una función que satisface

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s)}{|s|} = 0,$$

y la matriz de  $\gamma'(t)$  respecto a las bases usuales es

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \gamma'_3(t) \end{pmatrix}.$$

**Definición II.1.8** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino diferenciable, el **espacio tangente** del camino  $\gamma$  en el punto  $\gamma(t)$  es el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$

$$T\gamma_{\gamma(t)} = \{\gamma'(t) \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposición II.1.6** Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{\gamma} : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos caminos diferenciables, con cambio de parametrización  $\varphi$  diferenciable, entonces

$$T\gamma_{\gamma(t)} = T\hat{\gamma}_{\hat{\gamma}(\hat{t})}$$

donde  $\varphi(\hat{t}) = t$ .

**Demostración.-** Tenemos que  $\hat{\gamma}'(\hat{t}) = \gamma'(t) \cdot \varphi'(\hat{t})$  por la regla de la cadena. Ahora bien  $\varphi'(\hat{t}) \neq 0$  por que su inversa también es diferenciable y  $(\varphi^{-1})'(t) = 1/\varphi'(\hat{t})$ , de donde

$$T\gamma_{\gamma(t)} = T\hat{\gamma}_{\hat{\gamma}(\hat{t})}.$$

□

Por consiguiente, hemos mostrado que el espacio tangente es independiente de la parametrización, de donde:

**Definición II.1.9** Sea  $\mathcal{C}$  una curva diferenciable,  $A \in \mathcal{C}$ , el **espacio tangente** de  $\mathcal{C}$  en  $A$  es

$$T\mathcal{C}_A = \{\gamma'(t) \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde  $\gamma$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$  y  $A = \gamma(t)$ .

**Remarca II.1.5** El espacio tangente de una curva en un punto de ésta es un subespacio vectorial de dimensión 1 o 0.

La visualización del espacio tangente, si éste es de dimensión 1, de una curva  $\mathcal{C}$  en punto de ésta, se la realiza por medio de la recta que pasa por  $A$  y de dirección el espacio tangente, ver la figura II.15. Esta recta es

$$\mathcal{L}_{A,\gamma'(t)} = \{X = A + \gamma'(t) \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{X \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \gamma'(t)\} = \{X \mid \overrightarrow{AX} \in T\mathcal{C}_A\}.$$

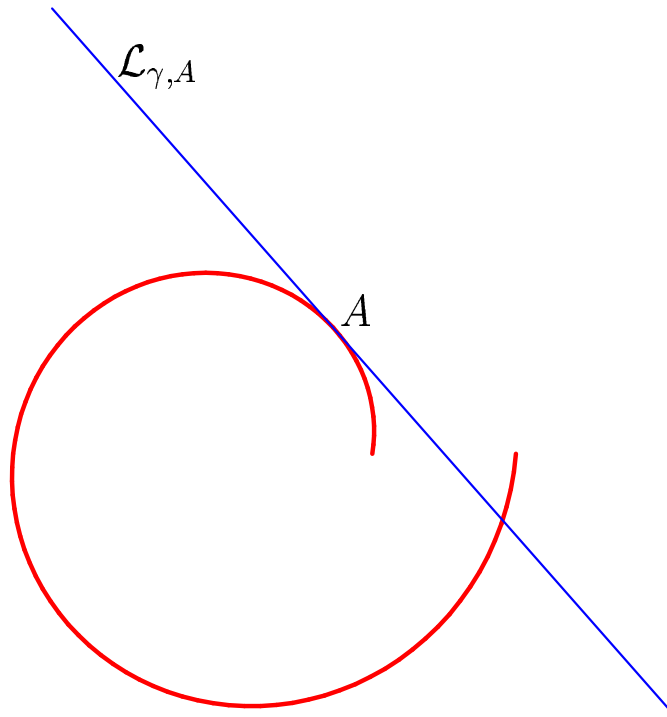


Figura II.1.5: Recta tangente y espacio tangente.

**Teorema II.1.2** Sea  $\mathcal{C}$  una curva diferenciable,  $A \in \mathcal{C}$ ,  $T\mathcal{C}_A$  subespacio vectorial de dimensión 1, entonces la recta que pasa por  $A$  de dirección  $\mathcal{C}_A$ , es tangente al soporte de  $\mathcal{C}$  en el punto  $A$ ; además esta recta es única.

**Demostración.-** Sea  $\gamma$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ ,  $\gamma(t) = A$ , por hipótesis  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ .

$\mathcal{L}_{A,\gamma'(t)}$  es la recta que pretendemos mostrar que es tangente al soporte de  $\mathcal{C}$ . Sabemos que si

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) + \gamma'(t)s + o(s),$$

de donde

$$d(\gamma(t+s), \mathcal{L}_{A,\gamma'(t)}) = o(s).$$

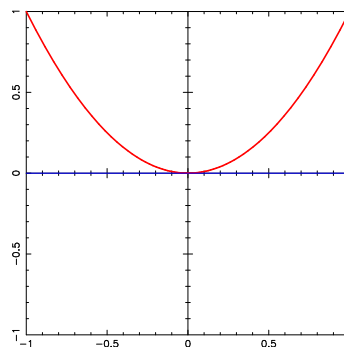
Por definición de  $o(s)$ , tenemos que  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s)}{s} = 0$ , lo que muestra que  $\mathcal{L}_{A, \gamma'(t)}$  es tangente al soporte de  $\mathcal{C}$  en  $A$ .

La unicidad la dejamos como ejercicio. □

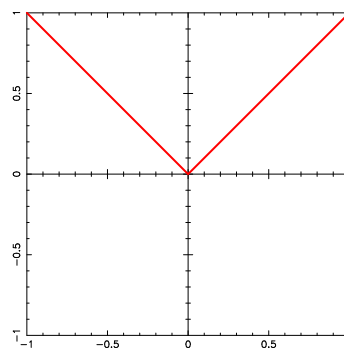
Cuando el espacio tangente es de dimensión 1, la curva se parece a la recta tangente en ese punto. En un punto donde el espacio tangente es de dimensión 0 cualquier cosa puede suceder, ver los siguientes ejemplos.

### Ejemplo II.1.4

1. Consideremos la curva de parametrización  $\gamma; [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ , tiene como soporte un trozo de parábola. Esta curva en el punto  $(0, 0)$  tiene como espacio tangente el subespacio  $\{0\}$ ; sin embargo el eje  $x$  es tangente a la parábola en cuestión.



2. Consideremos la curva de parametrización  $t \rightarrow (t|t|, t^2)$  con  $|t| \leq 1$  es diferenciable y esta curva en el punto  $(0, 0)$  tiene como espacio tangente el subespacio  $\{0\}$ . Sin embargo, no existe recta tangente al soporte de la curva en  $(0, 0)$ .



**Definición II.1.10** Se habla de curva de clase  $\mathcal{C}^1$  ( $\mathcal{C}^1$  por trozos) cuando las funciones en cuestión son diferenciables a derivadas continuas (derivadas continuas por trozos).

### Longitud de curvas diferenciables

En la primera sección se dio la noción de curva rectificable y se definió la longitud de una curva rectificable. Si bien la definición dada corresponde perfectamente a la intuición, su principal problema radica en la dificultad de utilizarla como un medio rápido de cálculo.

**Teorema II.1.3** Sea  $\mathcal{C}$  una curva  $\mathcal{C}^1$  ( $\mathcal{C}^1$  por trozos), entonces  $\mathcal{C}$  es rectificable y

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} dt, \quad (\text{II.1.13})$$

donde  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $\mathcal{C}$ .

**Demostración.-** Podemos suponer que  $\gamma$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , sino restringimos gamma a los intervalos donde es continuamente derivable. Sea  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  una subdivisión de  $[a, b]$ , denotamos por  $\delta_{\text{máx}} = \max \Delta t_i$  donde  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . Por lo tanto

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Puesto que  $\gamma$  es diferenciable, tenemos que

$$\begin{aligned} L(\gamma, P) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_{i-1})\Delta t_i + o(\Delta t_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_{i-1})\| \Delta t_i + \sum_{i=1}^n o(\Delta t_i) \end{aligned}$$

Como  $\gamma'(t)$  es una función continua, también lo es  $\|\gamma'(t)\|$ , por consiguiente

$$\lim_{\delta_{\text{máx}} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_{i-1})\| \Delta t_i = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Para la segunda suma, en el curso de Análisis, se muestra que  $|o(s)| \leq cs^2$ , donde  $c$  es una constante positiva. De donde

$$\left| \sum_{i=1}^n o(\Delta t_i) \right| \leq c \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2 \leq c \cdot (b-a) \cdot \delta_{\text{máx}},$$

se ve claramente que la segunda suma tiende a 0 cuando  $\delta_{\text{máx}}$  tiende a 0. □

**Proposición II.1.7** *Sea  $\mathcal{C}$  una curva de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización normal, si y solamente si,  $\|\gamma'(t)\| = 1$ .*

**Demostración.-**  $\Rightarrow$  Tenemos para todo  $t$

$$\int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = t,$$

derivando obtenemos que  $\|\gamma'(t)\| = 1$ .

$\Leftarrow$

$$\int_0^t \|\gamma'(s)\| ds = \int_0^t ds = t.$$

□

## Curvas Regulares

En las secciones precedentes se ha definido el concepto de curvas como clase de equivalencia de caminos relacionados por cambios de parametrización. Se ha definido la longitud de una curva y en el caso de curvas diferenciables se ha determinado una fórmula que facilita su cálculo. Sin embargo, no hemos analizado propiedades que son propias al soporte de la curva. En esta sección pretendemos estudiar algunas propiedades que son propias del soporte; para tal efecto necesitamos introducir el concepto de curvas regulares.

**Definición II.1.11** *Se dice una curva  $C$  de clase  $\mathcal{C}^1$  es **regular** si existe una parametrización  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ .*

**Remarca II.1.6**

1. Si  $\mathcal{C}$  es una curva regular, por cada punto de la curva pasa solamente una recta tangente, cuya dirección es el espacio tangente de la curva en el punto en cuestión.
2. Todas las parametrizaciones de una curva regular tienen derivadas no nulas.

**Definición II.1.12** Sea  $\mathcal{C}$  una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  o de clase  $\mathcal{C}^1$  por trozos,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización, se dice que  $\gamma(t)$  es un punto regular si  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  y singular si  $\|\gamma'(t)\| = 0$  o no está definida  $\gamma'(t)$ .

**Teorema II.1.4** Si  $\mathcal{C}$  es una curva regular, entonces  $\mathcal{C}$  puede parametrizarse por la longitud de arco, que es la parametrización normal.

**Demostración.-** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $C$ , por hipótesis  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ .  $C$  es rectificable por el teorema II.1.3. Definimos la función  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, L]$  por

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds,$$

$\varphi$  es una función estrictamente creciente, derivable y por lo tanto biyectiva; denotamos por  $\psi$  la inversa de  $\varphi$ .  $\psi$  es continuamente derivable, en efecto  $\psi'(s) = 1/\varphi'(\psi(s))$ . De donde  $\psi : [0, L] \rightarrow [a, b]$  es un cambio de parametrización.

Consideremos  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ , como nueva parametrización de  $C$ . Tenemos

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\| = \frac{\|\gamma'(t)\|}{\varphi'(t)} = 1.$$

Por lo tanto

$$s = \int_0^s \|\tilde{\gamma}'(u)\| du = \text{longitud del arco de } \tilde{\gamma}(0) \text{ a } \tilde{\gamma}(s).$$

□

**Respecto a la representación de curvas por ecuaciones**

Muy a menudo encontramos ecuaciones o sistemas de ecuaciones cuyas soluciones son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . En la sección convenimos que se trataban de curvas, si era posible encontrar una parametrización para estos conjuntos. Denotemos por  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ ; ahora bien, en el contexto que estamos tratando  $\mathcal{S}$  tiene la forma

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\},$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  es una función derivable. Si estamos en el espacio,  $n = 3$  y  $\mathcal{S}$  es la solución de dos ecuaciones; en el caso en que estemos en el plano  $n = 2$  y  $\mathcal{S}$  es la solución de una ecuación. En los casos usuales,  $f$  es una función continuamente derivable. A continuación enunciamos un teorema que da condiciones suficientes para que  $\mathcal{S}$  sea una curva.

**Teorema II.1.5** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  una función continuamente derivable,  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$  el conjunto de ceros de esta función. Supongamos que  $f'$  sea sobreyectiva sobre  $\mathcal{S}$ , excepto eventualmente en un número finito de puntos. Entonces  $\mathcal{S}$  es una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  por trozos, y los puntos donde  $f$  es sobreyectiva son puntos regulares. Además si  $A$  es un punto regular donde  $f'(A)$  es sobreyectiva se tiene

$$T S_A = \ker f'(A).$$

**Demostración.-** La existencia de una parametrización de clase  $\mathcal{C}^1$  por trozos resulta de teoremas de Análisis que serán vistos posteriormente. Veamos el segundo punto, sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $S$ , supongamos que  $\gamma(t) = A$ , tenemos

$$T S_{\gamma(t)} = \text{Imagen } \gamma'(t).$$

Por otro lado  $f \circ \gamma = 0$ , aplicando la regla de la cadena, tenemos que  $f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$  lo que implica que

$$\text{Imagen } \gamma'(t) \subset \ker f'(\gamma(t)),$$

puesto que  $f'(\gamma(t))$  es sobreyectiva y aplicando la fórmula de dimensión tenemos

$$\text{Imagen } \gamma'(t) = \ker f'(\gamma(t)).$$

□

### Ejemplo II.1.5

1. La ecuación  $(x^2 + y^2)^2 - 4xy = 0$  representa una curva. En este caso  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4xy$  y la derivada está dada por la matriz

$$f'(x, y) = (4(x^2 + y^2)x - 4y \quad 4(x^2 - y^2)y - 4x).$$

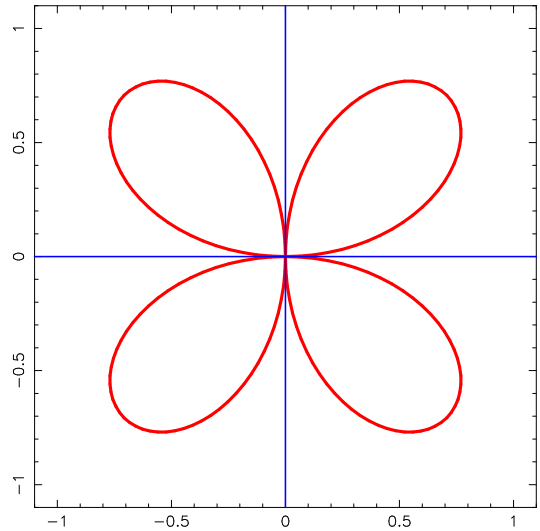
$f'(x, y)$  no es sobreyectiva cuando  $f'(x, y)$  es la matriz nula; esto sucede cuando  $x = 0$  y  $y = 0$ .

Para la solución de la ecuación, se tiene la siguiente parametrización  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \cos(t) \\ \sin(2t) \sin(t) \end{pmatrix},$$

puede observarse que  $\gamma(0) = \gamma(\pi/2) = \gamma(\pi) = \gamma(3\pi/2)$ . Por otro lado, tenemos que  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{3 \cos^2(2t) + 1} \neq 0$ , con lo que la parametrización es regular.

La explicación por que  $f'(0, 0)$  no es sobreyectiva, es por que podemos trazar dos rectas tangentes a la curva por  $(0, 0)$  que son los ejes  $x$  e  $y$ ,



2. Consideremos la ecuación  $x^3 - y^2 = 0$ . La función  $f$  sera

$$f(x, y) = x^3 - y^2,$$

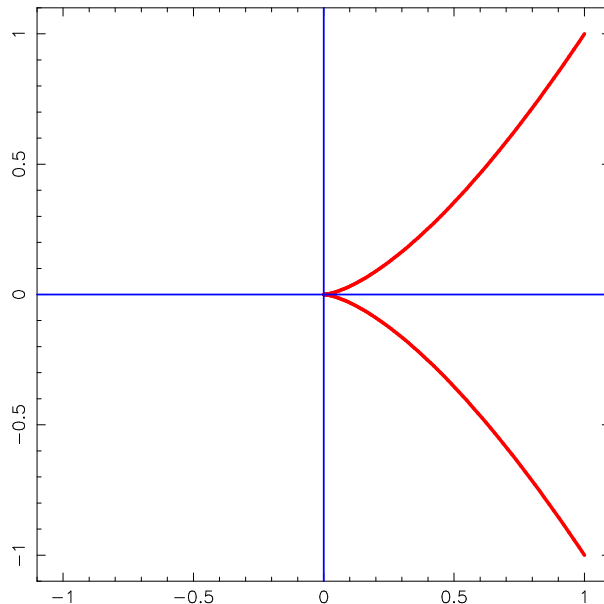
la derivada de esta función está dada por

$$f'(x, y) = (3x^2 \quad -2y).$$

Por consiguiente  $f'(x, y)$  no es sobreyectiva cuando  $x = 0$  y  $y = 0$ . Un trozo de la solución de la ecuación está dada por la parametrización

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Observamos que  $(0, 0)$  pertenece al grafo y es un punto singular de la curva.



## Curvatura y Torsión

En lo que sigue las curvas serán regulares y  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la parametrización normal, a menos que se diga lo contrario. Por consiguiente,  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , para todo  $s \in [0, L]$ , además  $s$  es la longitud del arco de curva que une  $\gamma(0)$  con  $\gamma(s)$ .

**Definición II.1.13** El **vector tangente unitario** a la curva  $\mathcal{C}$  en el punto  $\gamma(s)$  es

$$\vec{t}(s) = \gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s).$$

Como su nombre indica  $\vec{t}(s)$  es de norma unitaria y da la dirección del espacio tangente. Para visualizar el vector tangente, es costumbre colocar el origen de este vector sobre  $\gamma(s)$ , ver figura II.1.6.

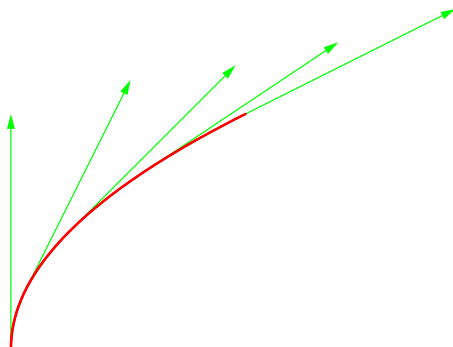


Figura II.1.6: Vectores tangentes.

Supongamos que  $\mathcal{C}$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , es decir 2 veces continuamente diferenciable, entonces la aplicación

$$s \mapsto \gamma'(s) = \vec{t}(s)$$

es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposición II.1.8** Si  $\mathcal{C}$  es una curva regular de clase  $\mathcal{C}^2$ , se tiene

$$\left\langle \frac{d\vec{t}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle = 0, \quad \forall s \in [0, L].$$

**Demostración.-** Tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle &= \|\gamma'(s)\|^2 = 1, \\ \frac{d}{ds} (\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle) &= 2 \left\langle \frac{d\vec{t}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

**Proposición II.1.9**  $\mathcal{C}$  curva regular de clase  $\mathcal{C}^2$ , entonces:  $\mathcal{C}$  segmento de recta, si y solamente si  $\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = 0$ ,  $\forall s \in [0, L]$ .

**Demostración.-**  $\Rightarrow$ ,  $\mathcal{C}$  segmento de recta, entonces su parametrización normal es de la forma

$$\gamma(s) = A + s\vec{d}, \quad \text{con } \|\vec{d}\| = 1,$$

derivando dos veces  $\gamma(s)$  obtenemos lo deseado.

$\Leftarrow$ , Si  $\gamma''(s) = 0 \forall s \in [0, L]$ , se tiene que  $\gamma'(s) = \vec{d}$ , como  $\gamma$  es la parametrización normal  $\|\vec{d}\| = 1$  y por lo tanto

$$\gamma(s) = A + s\vec{d}.$$

□

Si  $\vec{t}'(s) \neq 0$ , entonces existe  $\vec{n}(s)$  unitario colineal a  $\vec{t}'(s)$  en el mismo sentido, llamado **vector normal unitario**; es decir

$$\vec{t}'(s) = \rho(s)\vec{n}(s), \text{ con } \rho(s) > 0.$$

**Definición II.1.14**  $\rho(s)$  se llama **curvatura** de  $\mathcal{C}$  en  $\gamma(s)$ ,  $R(s) = \frac{1}{\rho(s)}$  se llama **radio de curvatura** de  $\mathcal{C}$  en  $\gamma(s)$ . Convenimos que una recta tiene curvatura nula. La circunferencia de centro  $\gamma(s) + R(s)\vec{n}(s)$  y radio  $R(s)$  se llama la **circunferencia osculatriz** de  $\mathcal{C}$  en el punto  $\gamma(s)$ . Esta circunferencia se encuentra en el plano

$$\mathcal{P}_{\gamma(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s)}$$

llamado **plano osculador**.

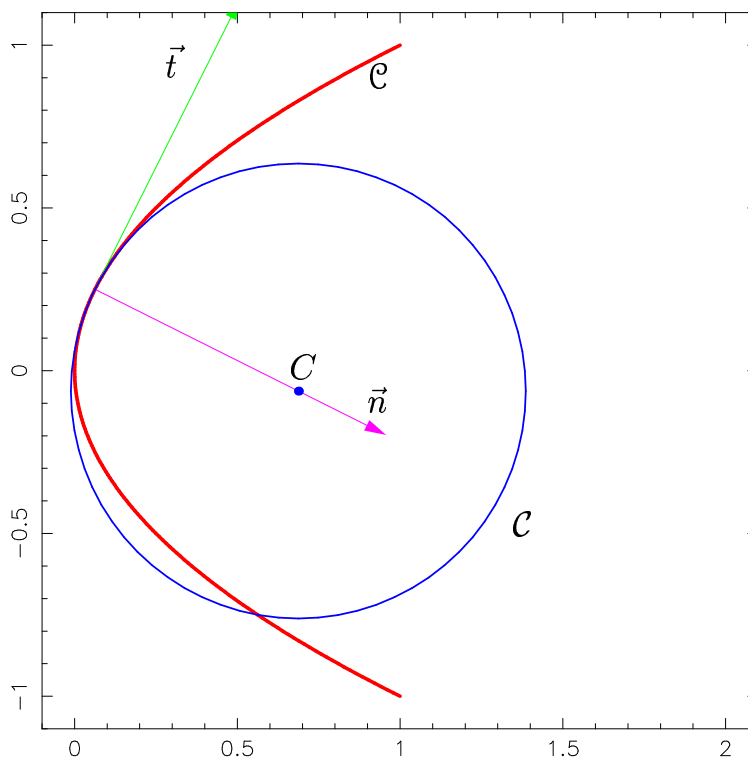


Figura II.1.7: Circunferencia oscultriz.

**Proposición II.1.10** La circunferencia oscultriz es la única circunferencia que tiene contacto de orden 2 con  $\mathcal{C}$  en  $\gamma(s)$ .

**Demostración.-** Puesto que  $\gamma$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , alrededor de  $\gamma(s)$  se tiene

$$\begin{aligned}\gamma(s + \vartheta) &= \gamma(s) + \vartheta\gamma'(s) + \frac{1}{2}\vartheta^2\gamma''(s) + o(\vartheta^2) \\ &= \gamma(s) + \vartheta\vec{t}(s) + \frac{1}{2}\vartheta^2\rho(s)\vec{n}(s) + o(\vartheta^2).\end{aligned}$$

El centro de la circunferencia osculatriz se encuentra en  $\gamma(s) + R(s)\vec{n}(s)$ . De donde la distancia de  $\gamma(s + \vartheta)$  a la circunferencia es

$$d(\gamma(s + \vartheta), \text{circunferencia}) = \left\| \vartheta\vec{t}(s) + \left(\frac{1}{2}\vartheta^2\rho(s) - R(s)\right)\vec{n}(s) \right\| - R(s) + o(\vartheta^2).$$

Puesto que  $\vec{t}(s)$  y  $\vec{n}(s)$  son ortogonales y unitarios aplicamos el teorema de Pitágoras, lo que da

$$d(\gamma(s + \vartheta), \text{circunferencia}) = \sqrt{\vartheta^2 + \left(\frac{1}{2}\vartheta^2\rho(s) - R(s)\right)^2} - R(s) + o(\vartheta^2),$$

dejamos como ejercicio mostrar que

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\vartheta^2 + \left(\frac{1}{2}\vartheta^2\rho(s) - R(s)\right)^2} - R(s) + o(\vartheta^2)}{\vartheta^2} = 0.$$

Para la unicidad de la circunferencia osculatriz, supongamos que existe otra circunferencia que tiene contacto de orden 2 con la curva en  $\gamma(s)$ . Como el contacto es de orden 2, lo es también de orden 1, por consiguiente esta circunferencia es tangente a la curva, de donde su centro se encuentra en la recta que pasa por  $\gamma(s)$  y de dirección  $\vec{n}$ , el resto lo dejamos como ejercicio. □

## Triedro de Frenet

Supongamos que  $\vec{n}(s)$  existe, por la proposición II.1.8,  $\vec{t} \perp \vec{n}$ , de donde podemos obtener el vector

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)$$

llamado **vector binormal unitario**.

**Definición II.1.15** La tripleta de vectores  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  se llama **triedro de Frenet**.

Por construcción, el triedro de Frenet es una base ortonormal directa, si es que existe. Además, debemos agregar que  $\gamma(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$  es un referencial ortonormal directo del espacio.

**Proposición II.1.11** Para  $\mathcal{C}$  curva regular de clase  $\mathcal{C}^3$ , se tiene  $\frac{d\vec{b}(s)}{ds}$  colineal a  $\vec{n}$ .

**Demostración.-** Tenemos

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = \frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Ahora bien,  $\frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{n}$  porque  $\|\vec{n}\| = 1$ . Por lo tanto

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \alpha\vec{t} + \tau\vec{b},$$

de donde

$$\vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau\vec{t} \wedge \vec{b} = -\tau\vec{n}.$$

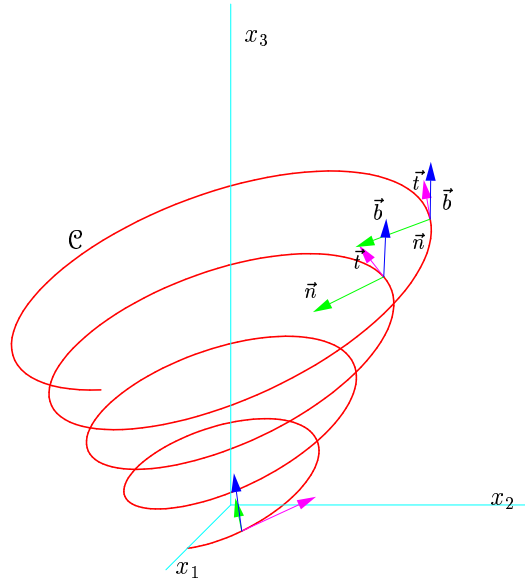


Figura II.1.8: Triedro de Frenet.

□

**Definición II.1.16** Se llama **torsión** de  $\mathcal{C}$  en el punto  $\gamma(s)$  al número  $\tau(s)$  dado por

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = -\tau\vec{n}.$$

**Remarca II.1.7** Se tiene  $\tau(s) > 0$  si y solamente si  $\mathcal{C}$  abandona el plano osculador en el sentido de  $\vec{b}(s)$ .

**Proposición II.1.12**  $\tau(s) = 0$ , para todo  $s$ , si y solamente si  $\mathcal{C}$  es una curva plana.

**Demostración.-**  $\Rightarrow$ ,  $\tau = 0$  da que  $\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$ , de donde  $\vec{b} = \text{constante}$ . Por lo tanto

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{b}, \gamma(s) \rangle = \langle \vec{b}, \vec{t}(s) \rangle = 0,$$

de donde

$$\langle \vec{b}, \gamma(s) \rangle = \text{constante} = \langle \vec{b}, \gamma(0) \rangle$$

y  $\langle \vec{b}, \gamma(s) - \gamma(0) \rangle = 0$ . Por lo tanto

$$\gamma(s) \in \mathcal{P}_{\gamma(0), \perp \vec{b}}.$$

$\Leftarrow$ , trivial por que  $\vec{t}(s)$  y  $\vec{n}(s)$  están en el plano de  $\mathcal{C}$ .

□

**Proposición II.1.13** Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular de clase  $\mathcal{C}^3$ . Las fórmulas de Serret-Frenet están dadas por:

$$\vec{t}'(s) = \rho(s)\vec{n}(s), \quad (\text{II.1.14})$$

$$\vec{n}'(s) = -\rho(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s), \quad (\text{II.1.15})$$

$$\vec{b}'(s) = -\tau\vec{n}(s). \quad (\text{II.1.16})$$

**Demostración.-** Solo debemos mostrar (II.1.16), porque las otras dos ya han sido vistas. Tenemos  $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ , de donde

$$\begin{aligned} \vec{n}'(s) = \vec{b}'(s) \wedge \vec{t}(s) + \vec{b}(s) \wedge \vec{t}'(s) &= -\tau(s)\vec{n}(s) \wedge \vec{t}(s) + \rho(s)\vec{b}(s) \wedge \vec{n}(s) \\ &= \tau(s)\vec{b}(s) - \rho(s)\vec{t}(s). \end{aligned}$$

□

### Parametrización cualquiera

El cálculo de las curvaturas, torsiones y demás conceptos relacionados han sido efectuados utilizando una de las parametrizaciones normales de la curva. Sin embargo, no siempre es posible de encontrar fácilmente esta parametrización, razón por la cual, tenemos la:

**Proposición II.1.14** Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular de clase  $\mathcal{C}^3$ , sea  $\gamma(u)$  una parametrización cualquiera de la curva. Entonces

$$\rho(u) = \frac{\|\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u)\|}{\|\dot{\gamma}(u)\|^3}, \quad (\text{II.1.17})$$

$$\tau(u) = \frac{[\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)]}{\|\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u)\|^2}. \quad (\text{II.1.18})$$

donde  $\dot{\gamma}$  designa  $\frac{d\gamma}{du}$ .

**Demostración.-** Sea  $\tilde{\gamma}(s)$  la parametrización normal,  $s$  designa la longitud de arco. Sea  $\varphi(s) = u$  el cambio de parametrización. Aplicando la regla de la cadena y otras reglas de derivación obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(s) &= \dot{\gamma}(u)\varphi'(s), \\ \tilde{\gamma}''(s) &= \ddot{\gamma}(u)(\varphi'(s))^2 + \dot{\gamma}(u)\varphi''(s), \\ \tilde{\gamma}'''(s) &= \ddot{\gamma}(u)(\varphi'(s))^3 + 3\ddot{\gamma}(u)\varphi''(s)\varphi'(s) + \dot{\gamma}(u)\varphi'''(s). \end{aligned}$$

Determinemos  $\rho(u)$ , tenemos utilizando las fórmulas de Serret-Frenet,

$$\begin{aligned} \vec{t}(s) &= \dot{\gamma}(u)\varphi'(s), \\ \rho(s)\vec{n}(s) &= \ddot{\gamma}(u)(\varphi'(s))^2 + \dot{\gamma}(u)\varphi''(s), \end{aligned}$$

utilizamos el producto vectorial entre las dos expresiones y pasamos a normas, de donde

$$\rho(s) = |(\varphi'(s))^3| \|\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u)\|.$$

Para verificar (II.1.17) es suficiente ver que  $|\varphi'(s)| = 1/\|\dot{\gamma}(u)\|$ . En efecto, suponiendo que  $\varphi$  es creciente, tenemos

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(s)} \|\dot{\gamma}(v)\| dv = s,$$

derivando, respecto a  $u$ , tenemos

$$\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| = \|\dot{\gamma}(u)\| = 1/\varphi'(s).$$

Si  $\varphi$  es decreciente, obtenemos otra relación parecida, que es la misma si se pasa al valor absoluto. La verificación de la segunda fórmula la dejamos como ejercicio. □

**Teorema II.1.6** Sean  $\rho, \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $\rho \geq 0$ . Entonces existe una curva regular de clase  $\mathcal{C}^3$  de curvatura  $\rho$ , torsión  $\tau$  y de longitud  $L$ . Dos de tales curvas  $\mathcal{C}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}$  son isométricas, es decir existe una isometría  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(\tilde{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$ .

**Demostración.-** Mostremos la unicidad. Longitud de arco, curvatura, torsión son invariantes por isometría, porque están definidas con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sea  $\gamma, \tilde{\gamma}$  parametrizaciones normales de  $\mathcal{C}$  y  $\tilde{\mathcal{C}}$  respectivamente. Entonces

$$\rho(s) = \tilde{\rho}(s), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(s), \quad \forall s \in [0, L].$$

Sea  $f$  la isometría tal que

$$f(\tilde{\gamma}(0)) = \gamma(0), \quad f(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'(0), \quad f(\tilde{\vec{n}}(0)) = \vec{n}(0), \quad f(\tilde{\vec{b}}(0)) = \vec{b}(0).$$

Ahora bien, aplicando las fórmulas de Serret-Frenet para cada uno de los triedros, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( \|\tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s)\|^2 + \|\tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s)\|^2 + \|\tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s)\|^2 \right) = \\ & \frac{d}{ds} \left( \langle \tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s), \tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s) \rangle + \langle \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s), \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s) \rangle + \langle \tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s), \tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s) \rangle \right) \\ & = 2\rho(s) \langle \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s), \tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s) \rangle - 2\rho(s) \langle \tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s), \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s) \rangle \\ & \quad + 2\tau(s) \langle \tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s), \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s) \rangle - 2\tau(s) \langle \tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s), \tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \left( \|\tilde{\vec{t}}(s) - \vec{t}(s)\|^2 + \|\tilde{\vec{n}}(s) - \vec{n}(s)\|^2 + \|\tilde{\vec{b}}(s) - \vec{b}(s)\|^2 \right) = \text{constante} \\ & = \left( \|\tilde{\vec{t}}(0) - \vec{t}(0)\|^2 + \|\tilde{\vec{n}}(0) - \vec{n}(0)\|^2 + \|\tilde{\vec{b}}(0) - \vec{b}(0)\|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente  $\gamma'(s) = \tilde{\gamma}'(s) = 0$ , lo que implica que  $\gamma(s) = \gamma'(s)$  por que  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ .

La existencia de tal curva es resultado de la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. □

## Estudio Local de Curvas

En esta subsección pretendemos analizar el comportamiento de una curva regular en el espacio alrededor de un punto de ésta.

Definidos los vectores: tangente unitario, normal unitario y binormal unitario; el plano osculador, solo falta:

**Definición II.1.17** Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular,  $\gamma(s)$  una parametrización de esta curva. El plano **rectificante** de  $\mathcal{C}$  en el punto  $\gamma(s)$  es el plano

$$\mathcal{P}_{\gamma(s), \vec{t}(s), \vec{b}(s)};$$

el plano **normal** de  $\mathcal{C}$  en el punto  $\gamma(s)$  es el plano

$$\mathcal{P}_{\gamma(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)}.$$

Estudiemos las proyecciones ortogonales de la curva sobre estos tres planos de referencia que pasan por  $\gamma(s_0)$ . Sin perder generalidad, podemos suponer que  $s_0 = 0$  y  $\gamma(0) = 0$ .

Suponemos que  $\gamma$  es tres veces continuamente diferenciable, de donde el desarrollo en serie de Taylor con tres términos se reduce a

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + o(s^3).$$

Recordando las fórmulas de Serret-Frenet tenemos

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \vec{t}(0), \\ \gamma''(0) &= \vec{t}'(0) = \rho(0)\vec{n}(0), \\ \gamma'''(0)(\rho(0)\vec{n}(0))' &= \rho'(0)\vec{n}(0) + \rho(0)\vec{n}'(0) = \rho'(0)\vec{n}(0) + \rho(0)(-\rho(0)\vec{t}(0) + \tau(0)\vec{b}(0)); \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\gamma(s) = (s - \rho^2(0)\frac{s^3}{6})\vec{t}(0) + (\rho(0)\frac{s^2}{2} + \rho'(0)\frac{s^3}{6})\vec{n}(0) + \rho(0)\tau(0)\frac{s^3}{6}\vec{b}(0) + o(s^3).$$

Ahora bien, veamos las proyecciones sobre los planos referenciales de la curva que pasa por  $\gamma(0)$ . Para tal efecto, en cada dirección tomamos el término dominante cuando  $s \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la proyección sobre el plano osculador será la curva cuya parametrización es

$$s \rightarrow \left( \begin{array}{c} s \\ \rho(0)\frac{s^2}{2} \end{array} \right).$$

La proyección sobre el plano rectificante es la curva (parábola cúbica) de parametrización

$$s \rightarrow \left( \begin{array}{c} s \\ \rho(0)\tau(0)\frac{s^3}{6} \end{array} \right).$$

La proyección sobre el plano normal es la curva de parametrización

$$s \rightarrow \left( \begin{array}{c} \rho(0)\frac{s^2}{2} \\ \rho(0)\tau(0)\frac{s^3}{6} \end{array} \right).$$

## Propiedades Globales de Curvas

En lo que queda de este capítulo enunciaremos un teorema sin sin demostración.

**Definición II.1.18** Se dice que una curva regular es **cerrada simple**, si la parametrización normal  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  verifica:

$$\gamma(0) = \gamma(L) \quad \text{y} \quad 0 < s_1 \neq s_2 < L \Rightarrow \gamma(s_1) \neq \gamma(s_2).$$

**Teorema II.1.7 (Jordan)** Una curva  $\mathcal{C}$  cerrada simple, separa el plano en dos componentes conexas, una acotada llamada **interior** y otra no acotada.

**Remarca II.1.8** El teorema que se acaba de enunciar no es valido en general para otras superficies que no sea un plano

## Ejercicios

1. Graficar y hallar la longitud del arco de Arquímedes, cuya ecuación en coordenadas polares es  $\rho = \vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ .
2. Graficar el arco de curva de parametrización

$$\begin{aligned}x &= 3 \sin t, \\y &= 3 \cos t, \\z &= 2t,\end{aligned}$$

donde  $t \in [0, 4\pi]$ . Hallar la longitud y explicitar la parametrización normal de este arco de curva.

3. El punto  $M$  se desplaza en el espacio de modo que su proyección en el plano  $xy$  se mueve uniformemente sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  con velocidad angular  $\omega$  y su proyección sobre el eje  $z$  se desliza uniformemente con velocidad  $c$ . La curva que describe el punto  $M$  se denomina **hélice simple**. Hallar la ecuación paramétrica de la hélice tomando el tiempo  $t$  como parámetro y aceptando que en el momento inicial ( $t = 0$ ) el punto  $M$  tiene las coordenadas  $(a, 0, 0)$ . Graficar.
4. La hélice simple del ejercicio precedente, se proyecta sobre el plano  $xy$  mediante un haz de rectas paralelas que forma un ángulo  $\vartheta$  con el eje  $z$  y son paralelas al plano  $yz$ . Hallar la ecuación de la proyección. Graficar.
5. Una circunferencia de radio  $a$  rueda uniformemente sin resbalar sobre el eje  $x$  con velocidad  $v$ . Hallar la ecuación del camino  $\gamma$  que describe el movimiento de un punto  $M$  ligado fijamente a la circunferencia. Graficar. Si el punto  $M$  se encuentra sobre la circunferencia, la curva descrita se llama **cicloide**.
6. Mostrar que la relación  $\sim$  dada en el curso es de equivalencia.
7. Mostrar utilizando la definición que el camino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t = 0, \\ (t, t \sin(\pi/t)) & \text{sino;} \end{cases}$$

no es rectificable.

8. Sea  $\psi : [0, b] \rightarrow [0, L]$  una función sobreyectiva, continua y estrictamente creciente. Mostrar que  $\psi$  es inversible y su inversa también es continua y estrictamente creciente.
9. Sea  $y = y(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ .
  - a) Mostrar que el grafo de la función  $y(x)$  es el soporte de una curva, indicar una parametrización obvia de esta curva.
  - b) Si la función  $y(x)$  es continuamente diferenciable, deducir una fórmula para el cálculo de la longitud de la curva que representa el grafo de la función  $y(x)$ .
10. Para la hélice, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t;$$

hallar en el punto  $(1, 0, 0)$  la ecuación de la tangente.

11. ¿Bajo que ángulos se cortan las curvas

$$xy = c_1, \quad x^2 - y^2 = c_2?$$

12. Demostrar que si las tangentes a una curva diferenciable pasan por un mismo punto, entonces el soporte de la curva es un segmento de recta.

13. Demostrar que la propiedad de contacto es una relación de equivalencia en el conjunto de curvas diferenciables.

14. Hallar la longitud del segmento  $-a \leq x \leq a$  de la parábola

$$y = bx^2.$$

15. Hallar la longitud del camino

$$x = a \cosh s, \quad y = a \sinh s, \quad z = as,$$

con  $0 \leq s \leq t$ . Graficar.

16. El **astroide** tiene como parametrización

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Graficar y dar su longitud.

17. Para la hélice

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

hallar en el punto  $(1, 0, 0)$  las ecuaciones del plano osculador, del plano normal, de la normal principal y de la binormal.

18. Determinar la ecuación de la tangente a la curva definida por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$$

en el punto  $(0, 0, 1)$ .

19. Sobre las binormales de una hélice simple se toman segmentos de una misma longitud. Hallar la ecuación de la curva formada por los extremos de estos segmentos.

20. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene un contacto de orden dos con la parábola  $y = x^2$  en su vértice.

21. Sea  $\mathcal{S} = \{\gamma_\alpha\}$  una familia de caminos que definen curvas regulares dependientes de un parámetro  $\alpha$ . Una curva regular  $C$  se denomina **envolvente** de la familia  $\{\gamma_\alpha\}$  si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una curva de la familia de curvas y si cualquier segmento de arco de la curva es tangente a un subconjunto infinito de curvas de la familia  $\mathcal{S}$ . Hallar la envolvente de la familia de rectas sobre las cuales los ejes de coordenadas determinan un segmento de longitud constante  $a$ .

22. Hallar la envolvente de los rayos luminosos que parten del origen de coordenadas y son reflejados por la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

23. Hallar en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  la ecuación del plano osculador a la curva definida por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

24. Demostrar que la curva es plana si todos sus planos osculadores pasan por un mismo punto.

25. Mostrar que el radio de curvatura de una curva plana de ecuación  $y = f(x)$ ,  $z = 0$  está dada por

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

26. Mostrar que las fórmulas de Frenet-Serret pueden ser puestas bajo la forma

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{n}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{b},$$

donde  $s$  representa la longitud de arco. Determinar  $\vec{\omega}$ .

27. Sea  $\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\tan(t/2)))$ ,  $t \in [\pi/6, \pi/2]$ . Dibujar la imagen de  $\gamma$  y verificar que la longitud del segmento de la tangente entre la curva y el eje  $0x_2$  es constante igual a 1.
28. Dibujar las hélices circulares:

$$H_+(r, \mu) : \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \\ z(t) = 2\pi\mu t \end{cases} \quad H_-(r, \mu) : \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = -r \sin t \\ z(t) = 2\pi\mu t \end{cases}$$

Calcular su curvatura y torsión en cada punto. ¿Existe una isometría  $f$  del espacio con  $f(H_+(r, \mu)) = H_-(r, \mu)$ ? ¿Una isometría que preserve la orientación?

29. Calcular los radios de curvatura extremos de una elipse de semi-ejes  $a$  y  $b$ .
30. Sean  $\rho_0 > 0$ ,  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  que pasa por  $0 \in \mathbb{R}^3$  cuya curvatura y la torsión son  $\rho_0$  y  $\tau_0$   
*Indicación.*-  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  polinomios.
31. Mostrar que una curva plana de curvatura constante es una circunferencia.
32. Hallar la curvatura de la curva definida por las ecuaciones en forma implícita

$$\begin{aligned} x + \sinh x &= \sin y + y, \\ z + e^z &= x + \ln(1 + x) + 1; \end{aligned}$$

en el punto  $(0, 0, 0)$ .

33. Consideremos la curva dada por el grafo de  $(x, f(x))$ , obtener una fórmula para la curvatura.
34. Se llama **evoluta** de una curva, a la curva que se obtiene de los centros de curvatura de la curva. Suponiendo que la curvatura no se anule y su derivada no cambie de signo. Mostrar que la longitud de la evoluta está dada por la diferencia de las curvaturas en las extremidades de la curva.
35. 9.-La **envolvente** de una curva  $\mathcal{C}$  es una curva cuya evoluta es  $\mathcal{C}$  con curvatura nula en uno de los extremos de las curvas. En el caso en que  $\mathcal{C}$  sea una circunferencia, la envolvente es la trayectoria de la extremidad de un hilo tendido que se desenrolla de la circunferencia. Encontrar una parametrización de esta curva.
36. Encontrar la torsión de la curva de parametrización

$$\begin{aligned} x &= \frac{2t+1}{t-1}, \\ y &= \frac{t^2}{t-1}, \\ z &= t+2. \end{aligned}$$

¿Qué podemos deducir?

## II.2. Superficies

Habiendo finalizado el estudio de curvas, corresponde el estudio de las superficies en el espacio. Se ha visto que el concepto de curva es una generalización al de recta; en consecuencia, la generalización del plano será las superficies en el espacio.

**Definición II.2.1** *Un trozo de superficie parametrizada es una aplicación  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , inyectiva y de rango 2 sobre  $]a, b[ \times ]c, d[$ .*

En la figura II.2.1 tenemos una representación de un trozo de superficie parametrizada. Expliquemos lo que entendemos que  $\varphi$  sea de rango 2. Como  $\varphi$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , la derivada es una aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas es de la forma

$$\varphi'_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix};$$

por consiguiente  $\varphi$  es de rango 2 si el rango de la matriz derivada es 2 para cada  $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ .

**Proposición II.2.1**  *$\varphi$  es de rango 2, si y solamente si  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  son linealmente independientes, si y solamente si  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}$*

**Demostración.-** Ver curso de Algebra Lineal. □

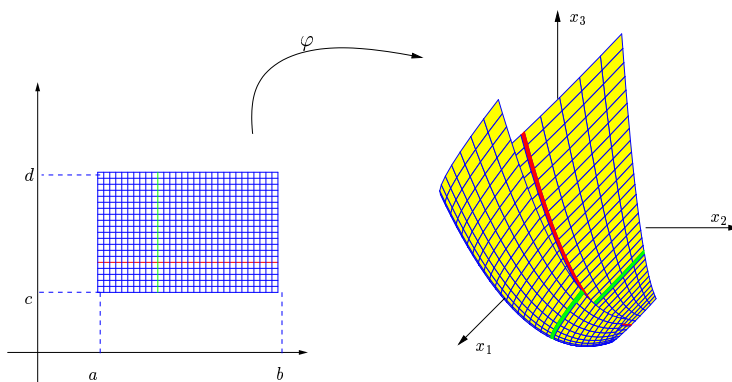


Figura II.2.1: Superficie Parametrizada.

**Definición II.2.2** *Dos trozos de superficie son equivalentes si tienen el mismo soporte.*

**Definición II.2.3** *Sea  $S$  el soporte de un trozo de superficie parametrizada.  $A \in S$ , el espacio tangente de  $S$  en el punto  $A$  es el subconjunto*

$$TS_A = \{ \varphi'_{(u,v)} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3,$$

donde  $\varphi$  es la parametrización y  $\varphi(u, v) = A$ .

Por definición de superficie parametrizada  $TS_A$  es un subespacio vectorial de dimensión 2. Se puede mostrar, lo dejamos como ejercicio, que

$$\mathcal{P}_{A,TS_A}$$

el plano que pasa por  $A$  y de dirección  $TS_A$  es tangente a  $S$  en el punto  $S$ . Recordando Geometría Afín,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  es un vector normal al espacio tangente en  $\varphi(u, v)$  y en general es mucho más cómodo trabajar con el vector normal, que con los generadores del subespacio vectorial.

### Ejemplo II.2.1

1. La esfera  $\mathbb{S}^2$  de centro el origen y radio la unidad tiene como parametrización natural la aplicación  $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

$u$  es conocida como latitud y  $v$  como longitud. Veamos que a partir de  $\varphi$  podemos mostrar que  $\mathbb{S}^2$  es una superficie, es decir la unión de trozos de superficies parametrizadas.  $\varphi$  es inyectiva, excepto cuando  $v = 0$  o  $v = 2\pi$ , la verificación de esta afirmación la dejamos como ejercicio. Ahora bien

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix};$$

por lo tanto

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos^2 u \cos v \\ -\cos^2 u \sin v \\ -\sin u \cos u \end{pmatrix}.$$

Tenemos, después de realizar algunos cálculos que

$$\|\vec{n}(u, v)\| = |\cos u|.$$

Observamos que  $\|\vec{n}(u, v)\| = 0$  si y solamente si  $u = -\pi/2, \pi/2$ . En consecuencia, la definición no se cumple en los bordes del rectángulo  $[-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ ; sin embargo, los bordes hacen parte de un conjunto despreciable desde el punto del análisis.

2. Estudiemos la Superficie de Revolución, obtenida haciendo girar respecto al eje  $z$  una curva simple y regular contenida en el plano  $xz$ . Supongamos que  $C$  la curva es parametrizada por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_3(t))$  y  $\gamma$  inyectiva. La parametrización de esta superficie de revolución se da de manera natural por  $\varphi : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \cos v \\ \gamma_1(u) \sin v \\ \gamma_3(u) \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\vec{n}(u, v) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \cos v \\ \gamma_1'(u) \sin v \\ \gamma_3'(u) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\gamma_1(u) \sin v \\ \gamma_1(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(u) \gamma_3'(u) \cos v \\ \gamma_1(u) \gamma_3'(u) \sin v \\ \gamma_1(u) \gamma_1'(u) \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,  $\|\vec{n}(u, v)\| = |\gamma_1(u)| \sqrt{\gamma_1'^2(u) + \gamma_3'^2(u)}$ . Si suponemos que  $\gamma_1(t) > 0$ , excepto quizás en  $t = a$  o  $t = b$ , tenemos que la superficie de revolución definida más arriba es un trozo de superficie parametrizada. En la figura II.2.2 puede apreciarse una superficie de revolución.

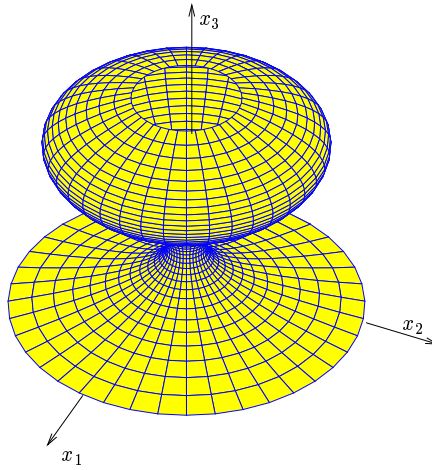


Figura II.2.2: Superficie de Revolución.

### Superficies Orientables

Sea  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  un trozo de superficie parametrizada, el plano tangente al soporte de  $\varphi$  en  $\varphi(u, v)$  con  $(u, v) \in ]a, b[ \times ]c, d[$  está bien determinado por un vector normal a éste; por lo hecho antes, tenemos como elección de la normal  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  o bien  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ .

Es conveniente y práctico en el estudio de superficies, considerar vectores normales unitarios; por consiguiente, las siguientes dos aplicaciones

$$\begin{aligned} \vec{n} : ]a, b[ \times ]c, d[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & \vec{n}' : ]a, b[ \times ]c, d[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} & (u, v) &\longmapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|} \end{aligned}$$

son continuamente diferenciables; además, tanto  $\vec{n}(u, v)$ , como  $\vec{n}'(u, v)$  son vectores normales unitarios al plano tangente que pasa por  $\varphi(u, v)$ , pero

$$\vec{n}'(u, v) = -\vec{n}(u, v).$$

Denotemos por  $S$  el soporte de  $\varphi$  y  $S^\circ$ , el interior del trozo de superficie parametrizada, a la imagen de  $]a, b[ \times ]c, d[$  por  $\varphi$ . Debido a la inyectividad de  $\varphi$  sobre  $]a, b[ \times ]c, d[$  tiene sentido definir las aplicaciones

$$\begin{aligned} \vec{n} : S^\circ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & \vec{n}' : S^\circ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v) &\longmapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} & \varphi(u, v) &\longmapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|} \end{aligned} \tag{II.2.1}$$

**Definición II.2.4** Se llama **trozo de superficie orientable** a un trozo de superficie parametrizada tal que  $\vec{n} : S^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$  se pueda prolongar continuamente sobre  $S$ .

**Remarca II.2.1** Si  $\vec{n}$  se puede prolongar continuamente sobre  $S$ , también es posible prolongar de manera continua  $\vec{n}'$  y recíprocamente.

**Definición II.2.5** Se llama **trozo de superficie orientada** a un trozo de superficie orientable con la elección de una función normal,  $(\vec{n}$  o  $\vec{n}'$ ).

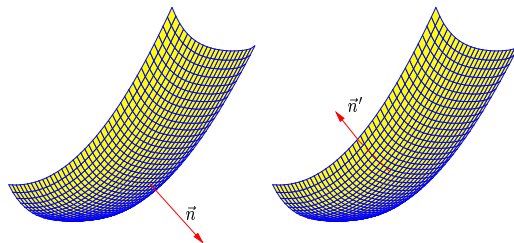
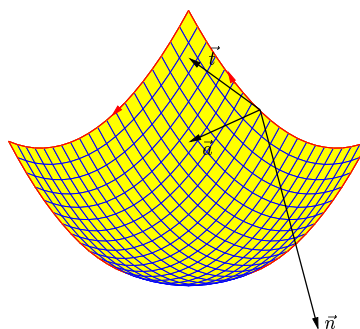


Figura II.2.3: Superficies Orientables.

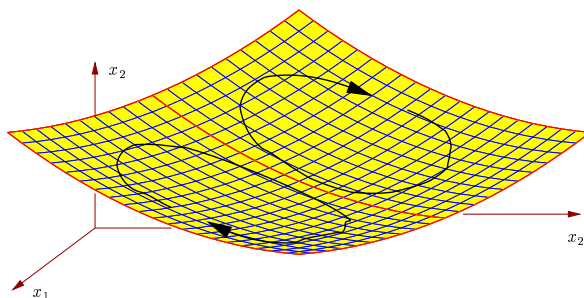
### Forma alternativa de expresar la orientación de un trozo de superficie

Habiendo elegido la orientación del trozo de superficie, es decir  $\vec{n}$ ; suponiendo que el borde de éste sea el soporte de una curva regular por trozos, se puede expresar la orientación del trozo de superficie eligiendo la orientación del borde de manera que en cualquier punto del borde, el vector tangente al borde  $\vec{t}$ , un vector del espacio tangente con orientación al interior de  $S$   $\vec{a}$  y el vector normal  $n$  del trozo formen una base directa, es decir  $[\vec{t}, \vec{a}, \vec{n}]$ .



**Definición II.2.6** Una **superficie lisa por trozos** es la unión de trozos de superficie parametrizadas que se intersectan sobre sus bordes.

**Definición II.2.7** Una superficie lisa por trozos es **orientable**, si existe una orientación sobre cada trozo que da orientación opuesta sobre la intersección.

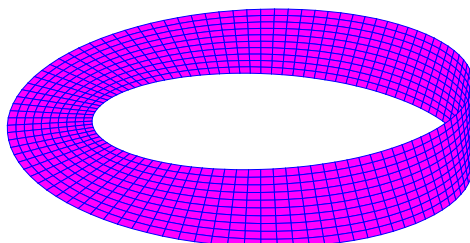
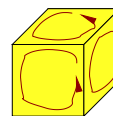


**Definición II.2.8** Una superficie lisa por trozos es **orientada** si es una superficie lisa orientable con la elección de una orientación.

**Definición II.2.9** Una superficie **lisa** es una superficie lisa por trozos tal que en cada punto existe una parametrización regular, es decir inyectiva y de rango 2.

**Ejemplo II.2.2**

1. El cubo tetraedro es una superficie lisa por trozos orientable. En efecto, las seis caras admiten parametrizaciones triviales y la orientación es una verificación sencilla de realizarla.
2. La **cinta de Möbius** es un ejemplo de trozo de superficie no orientable.



**Area de un Trozo de Superficie**

La determinación del área de un trozo de superficie parametrizada, la obtendremos de la misma manera que se procedió para una curva rectificable.

Recordemos que el area de una paralelogramo de vértices  $ABCD$  está dado por

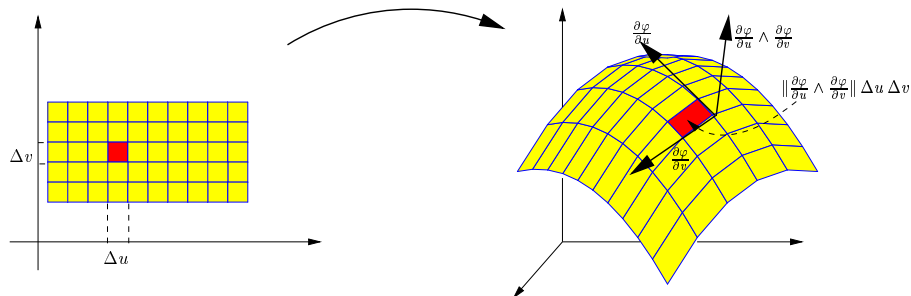
$$\text{Area } ABCD = \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$$

Consideremos un trozo de superficie parametriza  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sean  $\{a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b\}$  y  $\{c = v_0 < \dots < v_m = d\}$  subdivisiones de  $[a, b]$  y  $[c, d]$  respectivamente. Denominemos  $\delta = \max\{\Delta u_i, \Delta v_j\}$  donde  $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ ,  $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$ .

**Definición II.2.10** El **área** de  $S$  soporte de un trozo de superficie parametrizada,  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  está dado por

$$\text{Area } S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Area } \diamond \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}), \varphi(u_i, v_{j-1}), \varphi(u_i, v_j), \varphi(u_{i-1}, v_j). \tag{II.2.2}$$



Ahora bien, como  $\varphi$  es inyectiva sobre  $]a, b[ \times ]c, d[$  continuamente diferenciable y de rango 2 tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(u_i, v_{j-1}) &= \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i + o(\delta), \\ \varphi(u_{i-1}, v_j) &= \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j + o(\delta); \end{aligned}$$

de donde,

$$\text{Area} \diamond \varphi(u_{i-1}, v_{j-1}), \varphi(u_i, v_{j-1}), \varphi(u_i, v_j), \varphi(u_{i-1}, v_j) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \Delta u_i \Delta v_j + o(\delta).$$

Haciendo tender  $\delta$  a 0 tenemos la siguiente fórmula

$$\text{Area } S = \int_a^b \int_c^d \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv. \quad (\text{II.2.3})$$

**Remarca II.2.2** El área de un trozo de superficie es independiente de la parametrización elegida. La propiedad de área es independiente de la orientabilidad de la superficie

### II.2.1. Ejercicios

1. *Teorema de Pappus-Guldin.* Sea  $\mathcal{C}$  una curva regular situada en el semiplano

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, x > 0\}.$$

Mostrar que el área de la superficie de revolución  $\Sigma$  obtenida haciendo girar  $\mathcal{C}$  alrededor del eje  $0x_3$  vale

$$2\pi g(\mathcal{C})L(\mathcal{C}),$$

donde  $L(\mathcal{C})$  es la longitud de la curva y

$$g(\mathcal{C}) = \frac{1}{L(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} x_2 ds$$

es la distancia del centro de gravedad de  $\mathcal{C}$  al eje  $0x_3$ .

2. Sea

$$\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0\}$$

con  $R > r$ . Dar una parametrización de  $\mathbb{T}$  y calcular el área de  $\mathbb{T}$ .

*Indicación.*-  $\mathbb{T}$  es un toro.

3. Se denomina superficie de traslación la superficie que se obtiene por un movimiento de traslación de una curva a lo largo de otra. Demostrar que toda superficie de traslación admite como parametrización una función  $\phi(u, v) = U(u) + V(v)$ .
4. Probar que es una superficie de traslación la superficie formada por el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos pertenecen a dos curvas dadas.
5. Una recta  $L$  se desplaza en el espacio de modo que se cumplen las condiciones siguientes:
  - a) la recta  $L$  siempre forma un ángulo recto con el eje  $z$ ;
  - b) el punto de intersección de la recta  $L$  y del eje  $z$  se desplaza uniformemente con una velocidad  $v$ ;
  - c) la recta gira uniformemente alrededor del eje  $z$  con una velocidad angular  $\omega$ .
6. Hallar la ecuación de la superficie que describe en su movimiento la recta  $L$ . Esta superficie se denomina helicoidal simple o helicoides.

## II.3. Sistemas de Coordenadas

En cursos de nivel inferior, hemos utilizado otros sistemas de coordenadas para la solución de diversos problemas. Por ejemplo, en Cálculo II, se ha visto las coordenadas polares, cilíndricas, esféricas. En esta sección formalizaremos el concepto de coordenadas.

En este paragrafo  $n = 2$  o  $n = 3$ , para no estar modificando notación cuando mencionemos **volumen** nos referimos, en el caso en que  $n = 2$  al concepto de área, y si  $n = 3$  nos referimos al concepto de volumen usual.

**Definición II.3.1** Una **celda** de centro  $a \in \mathbb{R}^n$  y radio  $\delta > 0$  es el subconjunto

$$C(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq \delta\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.3.1})$$

Puesto  $C(a, \delta)$  es un cuadrado en el caso  $n = 2$  y un cubo en el caso  $n = 3$ , tenemos que

$$\text{Vol } C(a, \delta) = \delta^n. \quad (\text{II.3.2})$$

**Definición II.3.2** Se dice que  $\{C(a_i, \delta_i)\}_{i \in I}$  es un recubrimiento a lo más numerable de  $B \subset \mathbb{R}^n$ , si  $I$  es finito o  $I$  es numerable y

$$B \subset \bigcup_{i \in I} C(a_i, \delta_i). \quad (\text{II.3.3})$$

**Definición II.3.3** Un subconjunto  $N \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es **despreciable** si  $\forall \epsilon > 0$ , existe un recubrimiento de celdas a lo más numerable de  $N$  tal que el volumen del recubrimiento sea menor a  $\epsilon$ .

Sin ser rigurosos podemos aceptar que

$$\text{Vol} \bigcup_{i \in I} C(a_i, \delta_i) \leq \sum_{i \in I} \text{Vol } C(a_i, \delta_i). \quad (\text{II.3.4})$$

**Definición II.3.4** Si  $N$  es un conjunto despreciable, convenimos que  $\text{Vol } N = 0$ .

### Ejemplo II.3.1

1. En el espacio  $\mathbb{R}^3$ , las superficies y los soportes de curvas regulares por trozos son conjuntos despreciables.
2. En el plano  $\mathbb{R}^2$ , los soportes de curvas regulares por trozos son conjuntos despreciables.

**Definición II.3.5** Se llama **Sistema de Coordenadas** a una aplicación  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sobreyectiva y continuamente diferenciable, tal que  $\Phi'$  es inversible excepto quizás en un conjunto despreciable. Se llama coordenadas del punto  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $u \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Phi(u) = x$ .

### Ejemplo II.3.2

1. Un sistema de coordenadas muy utilizado, en el caso  $n = 2$ , es las coordenadas polares, está dado por

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Tenemos que,  $\Phi$  es continuamente diferenciable y sobreyectiva, dejamos como ejercicio la verificación. Por otro lado

$$\Phi'_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ahora bien,  $\Phi'_{(r, \theta)}$  es inversible, si y solamente si,  $\det \Phi'_{(r, \theta)} = r \neq 0$ . Por consiguiente,  $\Phi'_{(r, \theta)}$  no es

inversible en la recta  $r = 0$ , que es un conjunto despreciable de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Las coordenadas esféricas constituyen un sistemas de coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$\Phi$  es continuamente diferenciable y sobreyectiva, verificando

$$\Phi'_{(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \theta \\ r \sin \theta \cos \varphi & & & & \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi & & \end{pmatrix}$$

$\Phi'_{(r,\theta,\varphi)}$  es invertible  $\iff \det \Phi'_{(r,\theta,\varphi)} = -r^2 \sin \varphi \neq 0$ .

Si  $r = 0$  o  $\varphi = k\pi$ ,  $\Phi'_{(r,\theta,\varphi)}$  no es invertible, estas ecuaciones representan un conjunto numerable de planos en el espacio de las coordenadas, por consiguiente despreciables.

3. Las coordenadas cilíndricas constituyen un sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\Phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix},$$

Tenemos

$$\Phi'_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi'_{(r,\theta,z)}$  es invertible  $\iff \det \Phi'_{(r,\theta,z)} = r \neq 0$

$r = 0$  es un plano de  $\mathbb{R}^3$  que es despreciable.

**Proposición II.3.1** Sea  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema de coordenadas, en general  $\Phi$  no es inyectiva, pero si  $u \in \mathbb{R}^3$  es tal que  $\Phi'_u$  es invertible; entonces existe  $B(u, \delta) = \{v \mid \|v - u\| < \delta\}$ , con  $\delta > 0$  tal que  $\Phi|_{B(u, \delta)} : B(u, \delta) \rightarrow \Phi(B(u, \delta))$  es biyectiva. Denotamos por  $\Psi$  la inversa de  $\Phi|_{B(u, \delta)}$ , entonces  $\Psi$  es continuamente diferenciable y además

$$\Psi_x = (\Phi'_v)^{-1},$$

donde  $x = \Phi(v)$ ,  $\forall v \in B(u, \delta)$

**Demostración.-** La existencia y diferenciable de  $\Psi$  es resultado del Teorema de la Función Inversa, que será visto en un curso posterior de Análisis. Mostremos el segundo punto, efectuando las restricciones necesarias, tenemos que

$$\Psi \circ \Phi = id,$$

aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$(\Psi \circ \Phi)'_u = \Psi'_x \Phi'_u = I,$$

lo que muestra la segunda parte de la proposición.

□

### Representación de Objetos y Espacios Tangentes

Es más cómodo expresar un objeto de  $\mathbb{R}^n$ , como ser una superficie, el soporte de una curva, etc, bajo la forma de una ecuación en un sistema de coordenadas. Por ejemplo una circunferencia, en coordenadas polares se expresa como  $r = c$ .

Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , cuya ecuación en el sistema de coordenadas  $\Phi$  está dada por  $g(u) = 0$ , donde

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

es una aplicación lo suficientemente derivable. Se tiene que si  $U = \{u|g(u) = 0\}$ , entonces

$$S = \Phi(U),$$

por lo tanto  $S = \{\Phi(u)|g(u) = 0\}$ , por la proposición precedente existe  $\Phi$  tal que  $\Phi(x) = u$ , y por consiguiente  $g \circ \Phi(x) = 0$ , de donde

$$g'_u(\Phi'_u)^{-1}$$

define el espacio tangente, es decir

$$T S_x = \ker g'_u(\Phi'_u)^{-1}.$$

### Lineas de Coordenadas

En variadas situaciones es conveniente representar un sistema de coordenadas por sus líneas de coordenadas.

**Definición II.3.6** Sea  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un sistema de coordenadas, las líneas de coordenadas son las imagenes o soportes de los caminos obtenidos dejando fijas todas las coordenadas, excepto una.

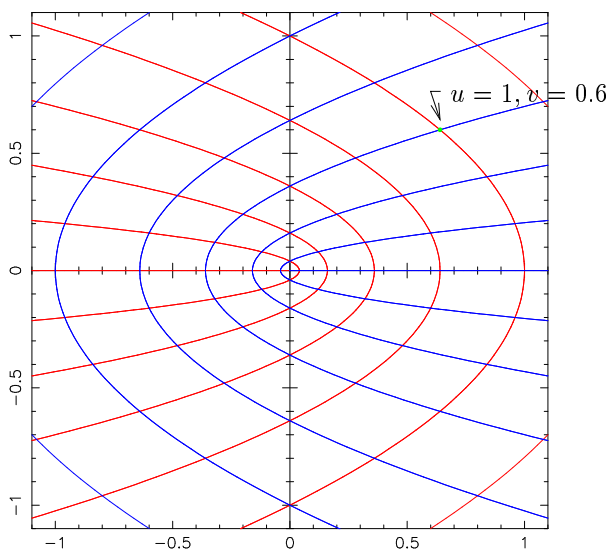


Figura II.3.1: Líneas de Coordenadas.

**Ejemplo II.3.3** Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ uv \end{pmatrix}.$$

$\Phi$  es bien un sistema de coordenadas; en efecto

$$\Phi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$$

no es inversible sobre las rectas  $u = v$  y  $u = -v$  conjuntos despreciables del plano. Veamos graficamente las líneas de coordenadas en la figura II.3.1.

**Referenciales inducidos**

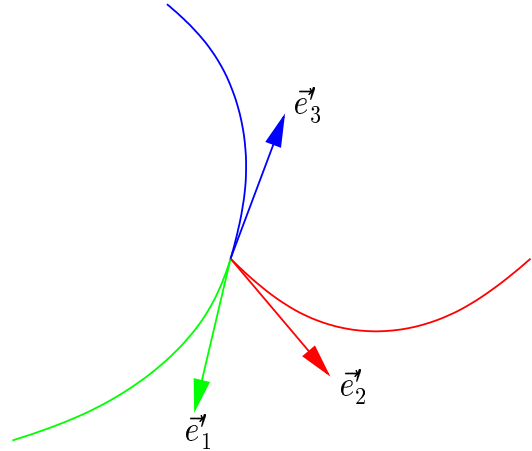
Sea  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema de coordenadas. Para efectos de ilustración tomemos  $n = 3$ . Las líneas de coordenadas que pasan por  $x = \Phi(u)$  nos hacen considerar un referencial  $x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  inducido por  $\Phi$  sobre el punto  $x$ .

Para facilitar cálculo posteriores, podemos suponer que  $\vec{e}_i$  es de norma 1, por lo tanto tenemos

$$\vec{e}_i = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right\|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si planteamos  $h_i = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right\|$ , se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = h_i \vec{e}_i. \tag{II.3.5}$$



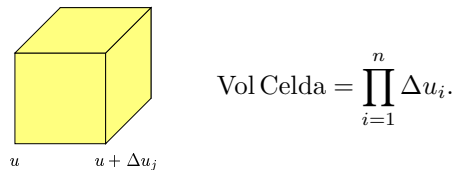
Los  $h_i$  se llaman factores de proporcionalidad.

**Elementos de Volumen**

Otra de las aplicaciones del estudio de líneas de coordenadas es la visualización de la transformación de un elemento de volumen del espacio de coordenadas ( $u \in \mathbb{R}^n$ ) en el espacio ambiente ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

La definición y construcción de la Integral de Riemann en regiones de  $\mathbb{R}^n$  toma en general como elementos de volumen celdas arbitrariamente pequeñas; la razón es por comodidad, el cálculo del volúmen de un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$  o bien un paralelepípedo recto en  $\mathbb{R}^3$  es inmediata.

Consideremos la celda de vértices  $\{u + \epsilon_j\}$  donde  $u = (u_i)_{i=1}^n$ ,  $\epsilon_j = (\epsilon_{ij})^n$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$  y  $\epsilon_{ij} = 0$  o  $\Delta u_i$ . De donde



Mediante  $\Phi$  sistema de coordenadas, esta celda se convierte en el elemento de volumen de vértices  $\Phi(u + \epsilon_j)$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$ . Puesto que  $\Phi$  es diferenciable, se tiene

$$\Phi(u + \epsilon_j) = \Phi(u) + \Phi'_u \epsilon_j + o(\epsilon_j). \tag{II.3.6}$$

De donde, cuando  $\epsilon_j$  es lo suficientemente pequeño, la imagen de la celda puede ser remplazado por el paralelepípedo de vértices  $\{\Phi(u) + \Phi'_u \epsilon_j\}$ .

**Ejercicio.-** Mostrar que el paralelepípedo de vértices  $\{\Phi(u) + \Phi'_u \epsilon_j\}$  tiene como volumen

$$|\det \Phi'_u| \prod_{i=1}^n \Delta u_i. \tag{II.3.7}$$

**Notación.-**  $J(u) = \det \Phi'_u$ , se llama **jacobiano** de  $\Phi$  en  $u$ .

**Proposición II.3.2** *Tenemos*

$$\text{Vol}(\Phi(\text{Celda})) = |J(u)| \text{Vol}(\text{Celda}) + o(\epsilon_j). \tag{II.3.8}$$

## Integración sobre Dominios

Antes de abordar el tema de integración, repasemos algunos conceptos básicos.

**Definición II.3.7** La bola abierta de radio  $\delta > 0$  y centro  $a \in \mathbb{R}^n$  es el subconjunto

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}.$$

**Definición II.3.8** La bola cerrada de radio  $\delta > 0$  y centro  $a \in \mathbb{R}^n$  es el subconjunto

$$\bar{B}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\}.$$

**Definición II.3.9** Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  no vacío, se dice que  $x \in R$  es un punto interior de  $R$  si existe  $B(x, \epsilon)$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset R$ .

**Definición II.3.10** El interior de  $R \subset \mathbb{R}^n$  es el subconjunto

$$R^\circ = \{x \in R \mid x \text{ es un punto interior de } R\}.$$

**Definición II.3.11**  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto adherente de  $R$  si  $\forall \epsilon > 0$   $B(x, \epsilon) \cap R \neq \emptyset$ . La adherencia de  $R$  es el subconjunto

$$\bar{R} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto adherente a } R\}.$$

**Definición II.3.12**  $x$  es un punto frontera o punto borde de  $R$  si  $x$  es adherente a  $R$  y adherente a  $R^C$ , donde  $R^C$  es el complemento de  $R$ . La frontera o borde de  $R$  es el subconjunto

$$\partial R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es un punto frontera de } R\}.$$

**Definición II.3.13**  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio (en el tipo de problemas que nos interesa), si  $D^\circ \neq \emptyset$ ,  $\partial D \subset D$ . Además si:  $n = 2$   $\partial D$  es la unión finita de soportes de curvas regulares por trozos,  $n = 3$   $\partial D$  es la unión finita de superficies lisas por trozos orientables.

**Ejemplo II.3.4**  $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, |x_3| \leq 1\}$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^3$  por que su interior

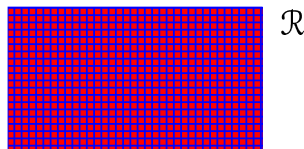
$$D^\circ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, |x_3| < 1\}$$

no es vacío y el borde de este cilindro es una superficie lisa por trozos orientable. La verificación de esta última afirmación la dejamos como ejercicio.

## Integrales Múltiples o de Volumen

Si bien el tratamiento de integrales múltiples o de volumen han sido desarrollados en el Curso de Cálculo, por lo tanto conocidos, vale la pena recordar la construcción y definición de tales integrales de manera heurística. Para tal efecto, lo haremos en el orden que corresponde.

Sea  $R \subset \mathbb{R}^n$  un rectángulo si  $n = 2$  o un paralelepípedo rectangular si  $n = 3$ . Sea  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Consideremos una partición de celdas  $C_i$  de  $R$ , denotamos  $\delta$  la longitud máxima que toman las diagonales de estas celdas, ver la figura. Una suma de Riemann para esta partición esta dada por



$$S(\{C_i, \xi_i\}, f) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \text{Vol } C_i,$$

donde  $\xi \in C_i$ .

**Definición II.3.14** Sea  $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada es integrable (en el sentido de Riemann) si existe y es único el

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S(\{C_i, \xi_i\}, f)$$

independientemente de la elección de las particiones y los  $\xi_i$ . Si es integrable denotamos este límite por

$$\int_R f, \int_R f(x)dx, \quad (\text{II.3.9})$$

en el caso  $n = 3$  también denotamos por

$$\int_R f(x) dV, \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3; \quad (\text{II.3.10})$$

en el caso  $n = 2$

$$\int_R f(x) dA, \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (\text{II.3.11})$$

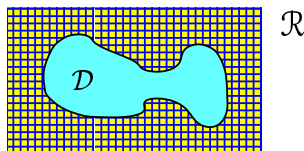
En análisis se vera que son funciones integrables las funciones continuas, excepto quizás discontinuas en un conjunto despreciable. Ahora bien, en el tipo de problemas que veremos las funciones son de estas características y la evaluación de estas integrales se resume a la evaluación de integrales simples por medio del teorema de Fubini.

El siguiente paso es definir las integrales sobre dominios acotados. Sea  $D$  un dominio acotado, considermos una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Como  $D$  es acotada,  $D$  puede inscribirse en una celda  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ . La función  $f$  la prolongamos sobre la celda  $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  por la función  $f^*$  definida por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Se puede mostrar que  $f^*$  es discontinua en un conjunto despreciable de la celda. De donde definimos

$$\int_D f(x)dx = \int_R f^*(x)dx.$$



### Teorema del Cambio de Variable

Los sistemas de coordenadas permiten trabajar de manera más sencilla en el espacio de las coordenadas que en el espacio ambiente, aprovechando situaciones de simetría y otras.

Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio (en el espacio ambiente) y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, a menudo debemos evaluar

$$\int_D f(x) dx,$$

pero el cálculo de esta integral puede sumamente complicada en la determinación de los límites de integración cuando se utiliza el teorema de Fubini que convierte en una evaluación de integrales iteradas. Ahora bien utilizando un sistema de coordenadas convenientes, se puede encontrar un dominio  $\tilde{D}$  en el espacio de coordenadas tal que

$$\Phi(\tilde{D}) = D,$$

donde los bordes de  $\tilde{D}$  son más sencillos de expresarlos.

**Ejercicio.-** Utilizando la noción de elementos de volumen y la definición de integral, mostrar heurísticamente el teorema de cambio de variable

$$\int_{\tilde{D}} f \circ \Phi(u) |J(u)| du = \int_D f(x) dx.$$

### Ejercicios

- 1.



# Capítulo III

## Campos de Vectores Diferenciables

En este capítulo se introducirá la noción de campo, tanto vectorial, como escalar. Se verá las diferentes maneras de representarlos.

Luego, se abordará la diferenciación de campos y la integración sobre campos de vectores, estudiando las propiedades más importantes y las diferentes reglas de cálculo.

Por último se tratará los operadores diferenciales más comunes, como ser gradientes, divergencia y rotacional.

### III.1. Campos vectoriales y escalares

Comencemos con el vocabulario básico, introduciendo las principales definiciones. En lo que sigue el capítulo  $n = 2, 3$ .

**Definición III.1.1 (Campo de vectores)** Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Un campo vectorial sobre  $\mathcal{U}$ , es una aplicación continua  $\vec{f} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición III.1.2 (Transformación)** Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Una transformación sobre  $\mathcal{U}$ , es una aplicación continua  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición III.1.3 (Campo escalar)** Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Un campo escalar sobre  $\mathcal{U}$  es una aplicación continua  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Ejemplo III.1.1

1. Ejemplos de campos vectoriales son: los campos de fuerzas, campos de velocidades de un fluido, campos gravitacionales, campos electromagnéticos, campos de vectores tangentes de una curva, campo de vectores normales de una superficie.
2. Ejemplos de campos escalares son: campos de temperaturas, campos de presión, de potencial, etc.
3. Ejemplos de transformaciones del espacio son las rotaciones, traslaciones, etc.

#### Remarca III.1.1

1. En las definiciones de campo vectorial y escalar,  $\mathcal{U}$  representa por lo general un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , pero también puede otro objeto como un arco de curva, una superficie.

2. Si  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  es una base, por ejemplo ortonormal y directa, se tiene que  $\vec{f}(x) = f_1(x)\vec{e}_1 + f_2(x)\vec{e}_2 + f_3(x)$ . Los  $f_i$  son las componentes respecto a esa base del campo  $\vec{f}$ . Estas funciones  $f_i$  a su vez pueden ser vistas como campos escalares.

**Definición III.1.4** Sean  $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos vectoriales,  $s, r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Las siguientes operaciones que definen nuevos campos vectoriales y escalares, están dadas por:

$$(\vec{f} + \vec{g})(x) = \vec{f}(x) + \vec{g}(x), \quad (\text{III.1.1})$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle(x) = \langle \vec{f}(x), \vec{g}(x) \rangle, \quad (\text{III.1.2})$$

$$(\vec{f} \wedge \vec{g})(x) = \vec{f}(x) \wedge \vec{g}(x), \quad (\text{III.1.3})$$

$$[\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}](x) = [\vec{f}(x), \vec{g}(x), \vec{h}(x)] \quad (\text{III.1.4})$$

$$(s\vec{f})(x) = s(x)\vec{f}(x), \quad (\text{III.1.5})$$

$$(\alpha\vec{f})(x) = \alpha\vec{f}(x), \quad (\text{III.1.6})$$

$$(rs)(x) = r(x)s(x), \quad (r+s)(x) = r(x) + s(x). \quad (\text{III.1.7})$$

## Representación gráfica de campos y transformaciones

La representación gráfica de campos vectoriales y escalares tiene un abanico de posibilidades al igual que las transformaciones.

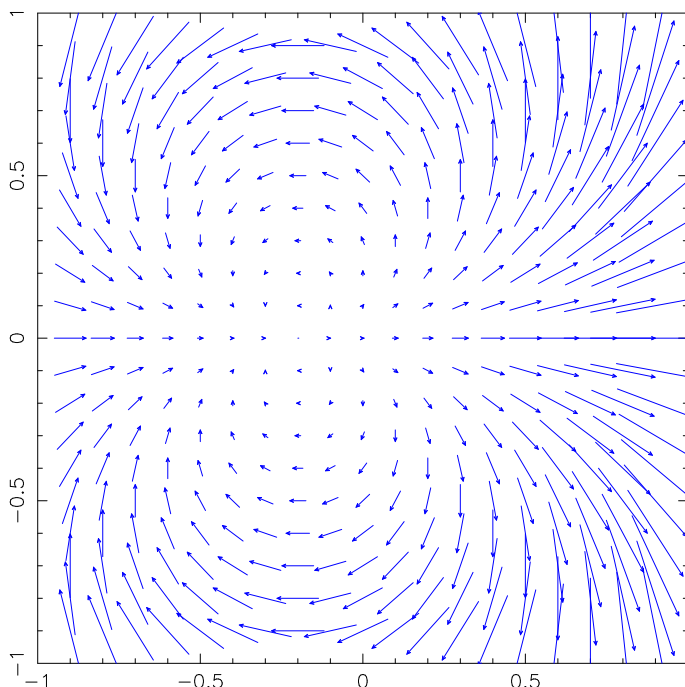
### Campos de vectores

La manera más usual de representar un campo de vectores, consiste en graficar sobre  $\mathcal{U}$  el dominio los vectores  $\vec{f}(x)$ , tomando como origen del vector el punto  $x$ .

**Ejemplo III.1.2** Consideremos el campo de vectores sobre  $\mathbb{R}^2$ , dado por

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (x_1 - 0,2)^2 - x_2^2 \\ 2(x_1 + 0,2)x_2 \end{pmatrix}.$$

La representación gráfica la observamos en la figura de la derecha.



**Transformaciones**

Una buena forma de visualizar transformaciones es graficando en un lado el conjunto dominio con algunos objetos geométricos y líneas paralelas a los ejes, y en el otro lado en la imagen los objetos transformados, como las líneas paralelas a los ejes del dominio.

**Ejemplo III.1.3** Consideremos la siguiente transformación  $\Phi$  del plano  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\Phi(x_1, x_2) = \left( 2, 1 \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1, 1x_1}{(x_1 - 1, 1)^2 + x_2^2} \right). \tag{III.1.8}$$

La acción de  $\Phi$  puede ser apreciada en la figura III.1.1.

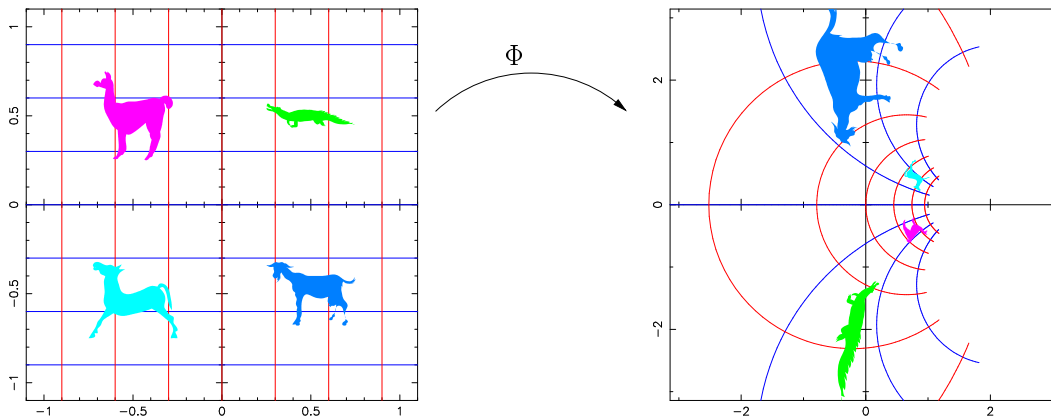


Figura III.1.1: Representación gráfica de una transformación del plano

**Campos escalares**

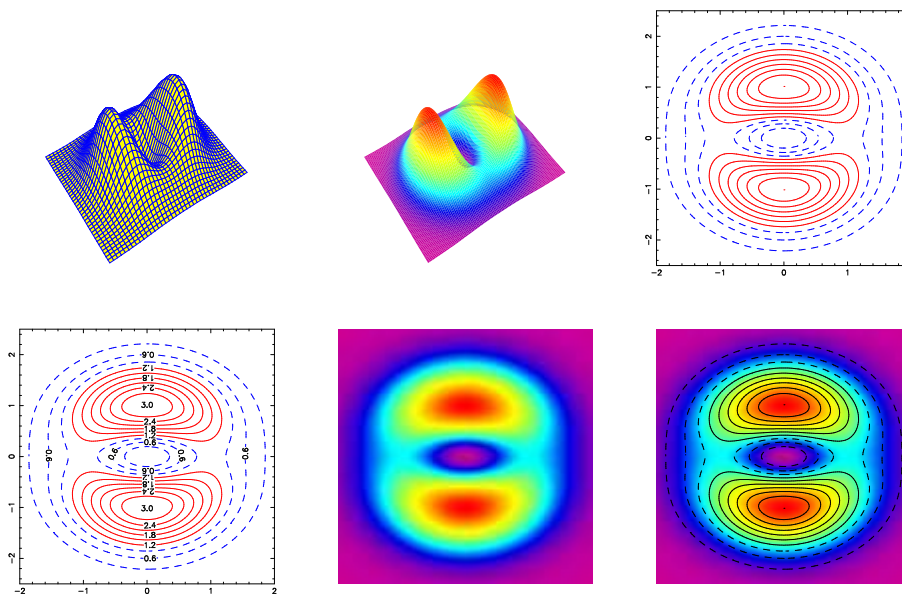


Figura III.1.2: Representaciones gráficas de un campo escalar

La visualización de campos escalares a través de gráficas puede realizarse de muchas maneras. En el curso de Cálculo II se ha estudiado algunas de éstas. Dependiendo el contexto se utiliza: los grafos de los campos, curvas y superficies de nivel, mapas de densidad, etc.

**Ejemplo III.1.4** Consideremos el campo escalar sobre  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 3x_2^2)e^{1-x^2-y^2}. \quad (\text{III.1.9})$$

En la figura III.1.2 podemos diferentes maneras de representar gráficamente este campo.

## Ejercicios

1.

## III.2. Diferenciación e integración sobre campos

Comencemos esta sección recordando algunas nociones de diferenciabilidad, vistas en los cursos de Cálculo I y Cálculo II.

**Definición III.2.1** Se dirá que una función  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo abierto, es diferenciable o derivable en punto  $a \in I$ , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.} \quad (\text{III.2.1})$$

Este límite se lo denota por  $f'(a)$ .

$f$  es diferenciable o derivable sobre  $I$ , si  $f$  es diferenciable en todo punto  $a \in I$ . La función derivada  $f'$  está dada por

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned} \quad (\text{III.2.2})$$

La definición de derivada que se acaba de enunciar, es una definición calculista, útil para realizar cálculos. La siguiente proposición da una definición geométrica de diferenciabilidad.

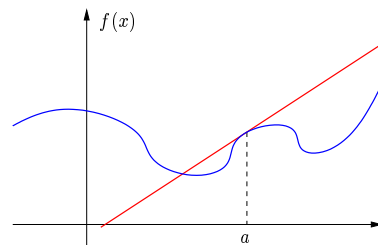
**Proposición III.2.1** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función, donde  $I$  intervalo abierto.  $f$  es diferenciable en el punto  $a$  si y solamente si existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h), \quad (\text{III.2.3})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (\text{III.2.4})$$

**Demostración.-** Revisar Curso de Cálculo I. □

**Remarca III.2.1** A través del concepto de derivada, es posible aproximar una función alrededor de un punto con una función lineal. Geométricamente, la derivada proporciona una recta tangente al grafo de la función.



La noción de diferenciabilidad puede ser extendida a funciones  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $n = 2, 3$ .

**Definición III.2.2** Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n = 2, 3$ , donde  $I$  es un intervalo abierto, es diferenciable o derivable en punto  $a \in I$ , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \text{ existe.} \quad (\text{III.2.5})$$

Este límite se lo denota por  $\gamma'(a)$  o  $\dot{\gamma}(a)$ .

$\gamma$  es diferenciable o derivable sobre  $I$ , si gamma es diferenciable en todo punto  $a \in I$ . La función derivada  $\gamma'$  está dada por

$$\begin{array}{l} \gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \gamma'(t) \end{array} \quad (\text{III.2.6})$$

### III.3. Gradiente, divergencia y rotacional

